Paul-André Meyer

Complément sur la dualité entre H^1 et BMO

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 237-238
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__237_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

COMPLEMENT SUR LA DUALITE ENTRE H^1 ET BMO

par P.A.Meyer

Ce "complément" est en fait une correction : je me suis aperçu, en exposant la dualité entre H^1 et BMO au "Symposium on functional analysis and stochastic processes" de Durham, Juillet 1974, que la démonstration du dernier théorème de l'exposé du séminaire de probabilités VII, p.141, était incomplète. Je vais donc la reprendre ici.

Rappelons les notations : N est une martingale de carré intégrable, $\| \ \|_{(1)}$ est la norme H^1, $\| \ \|_{(\infty)}$ la norme BMO (aussi appelée P^∞ dans l' exposé). On veut montrer que

(1) $$\|N\|_{(\infty)} \leqq \sqrt{5} \sup_M E[M_\infty N_\infty] = \sqrt{5} \sup_M E[[M,N]_\infty]$$

M parcourant l'ensemble des martingales de carré intégrable dont la norme H^1 est inférieure à 1. Noter que la constante n'est plus égale à 1...

Notons c le second membre de (1). La propriété cherchée résultera des deux inégalités suivantes : pour tout temps d'arrêt T

(2) $$E[N_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_T]-N_T^2 \leqq c^2$$ (noter une faute de frappe p.142, ℓ.3)

(3) $$|\Delta N_T| \leqq 2c$$

La démonstration de l'exposé ne prouve en fait que (2), par suite d'une erreur. Rappelons la rapidement. Le premier membre de (2) est égal à $E[Z|\underline{\underline{F}}_T]$, où $Z=[N,N]_\infty-[N,N]_T$. Soit $A\in\underline{\underline{F}}_T$, soit (D_t) le processus prévisible $I_A I_{\{t>T\}}$, soit $Y_t=E[N_\infty-N_T|F_t]$ l'intégrale stochastique D.N. Alors

$$[Y,N]_t = \int_0^t D_s d[N,N]_s = \int_0^t D_s^2 d[N,N]_s = [Y,Y]_t$$

et en particulier $[Y,Y]_\infty=[Y,N]_\infty=I_A Z$, $\|Y\|_{(1)}=E[[Y,Y]_\infty^{1/2}]=E[I_A\sqrt{Z}]$.

Il est peut être prétentieux d'utiliser les intégrales stochastiques pour établir un résultat si simple ! Utilisant alors la définition de c (1), nous avons

$$E[ZI_A] = E[[Y,N]_\infty] \leqq c\|Y\|_{(1)}= cE[\sqrt{ZI_A}\, I_A]$$

L'inégalité de SCHWARZ nous donne alors $E[ZI_A]\leqq c\sqrt{E[ZI_A]}\sqrt{P(A)}$, d'où l'on tire (2). L'erreur de l'exposé consistait ici à croire que ce calcul s'appliquait avec $Z=[N,N]_\infty-[N,N]_{T-}$, au lieu de $[N,N]_T$, comme dans le cas étudié par GETOOR.

Passons à (3). Il s'agit en fait de vérifier que les sauts de la martingale N sont tous majorés par 2c. Décomposant les instants de saut en leurs parties totalement inaccessible et accessible, puis en remarquant que tout graphe accessible est contenu dans la réunion d'une suite de graphes prévisibles, on se ramène à démontrer (3) lorsque T est, soit totalement inaccessible, soit prévisible.

Comme N est de carré intégrable, $\sup_t |N_t|$ appartient à L^2, et la v.a. $\underset{\sim}{U}= \Delta N_T$ appartient à $L^2(\underline{\underline{F}}_T)$. Soit $V=L^2(\underline{\underline{F}}_T)$, soit $A_t=VI_{\{t\geq T\}}$, et soit $\tilde{A}_t$ l'unique processus prévisible à variation intégrable tel que $M_t=A_t-\tilde{A}_t$ soit une martingale. Nous allons écrire que $E[[M,N]_\infty]\leq c\|M\|_{(1)}$.

Cas totalement inaccessible : On sait que $\tilde{A}$ est continu, $[M,M]_t=V^2I_{\{t\geq T\}}$, $[M,N]_t=UVI_{\{t\geq T\}}$. Donc $\|M\|_{(1)}=\|V\|_1$ et

$$E[UV] \leq c\|V\|_1$$

Comme V est arbitraire, on a $\|U\|_\infty\leq c$, ce qui entraîne (3).

Cas prévisible : On a alors $E[U|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, $\tilde{A}_t=E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}]I_{\{t\geq T\}}$, $[M,M]_t = (V-E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}])^2I_{\{t\geq T\}}$, $[M,N]_t=U(V-E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}])I_{\{t\geq T\}}$, $\|M\|_{(1)}=\|V-E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}]\|_1$. Ainsi

$$E[U(V-E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}])]\leq c\|V-E[V|\underline{\underline{F}}_{T-}]\|_1 \leq 2c\|V\|_1$$

Le côté gauche vaut aussi $E[UV]$ puisque $E[U|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, et on a $\|U\|_\infty\leq 2c$. La démonstration est achevée.