Séminaire de probabilités (Strasbourg)

José de Sam Lazaro
Paul-André Meyer

Questions de théorie des flots (II)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 15-29
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__15_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (II)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Nous continuons l'étude des flots sous une fonction et des processus ponctuels discrets, commencée dans l'exposé I. Nous commençons par montrer que ces deux notions sont, en fait, absolument équivalentes . La caractérisation des flots sous une fonction donnée dans l'exposé I, Prop.2, donne alors un résultat fondamental de la théorie des processus ponctuels discrets, par simple traduction : l'existence de la <u>mesure de PALM</u> d'un processus ponctuel. NEVEU nous a signalé que cette présentation de la théorie de la mesure de PALM, que nous croyions nouvelle, avait été développée par HANEN (Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux. Ann. Institut Henri Poincaré, 7, 1971, p.23-30).

Nous consacrons ensuite un paragraphe à la <u>filtration</u> du flot sous une fonction. Enfin, le paragraphe 3 est consacré au théorème de représentation d'AMBROSE-KAKUTANI : tout flot (filtré) raisonnable est isomorphe à un flot sous une fonction. Mais nous n'avons pas vraiment besoin de ce résultat, et le paragraphe est rédigé sous forme de bavardage mondain .

1. MESURE DE PALM D'UN PROCESSUS PONCTUEL DISCRET

PROCESSUS PONCTUELS DISCRETS = FLOTS SOUS UNE FONCTION

Nous n'insisterons pas ici sur le fait que le flot sous une fonction contient un processus ponctuel discret naturel (les " points" correspondant aux discontinuités de la composante temporelle) : nous verrons cela en détail plus loin. Nous nous occupons ici de la démarche inverse , consistant à <u>interpréter le flot d'un processus ponctuel discret comme un flot sous une fonction</u>.

Nous considérons un flot $(\Omega,\underline{\underline{A}}^{\circ},P,(\Theta_t))$; l'application $(t,\omega) \mapsto \Theta_t\omega$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable ; nous notons $\underline{\underline{A}}^*$ la complétion universelle de $\underline{\underline{A}}^{\circ}$, $\underline{\underline{A}}$ la complétion de $\underline{\underline{A}}^{\circ}$ pour P. Soit (X_t) un processus ponctuel discret, stationnaire, à valeurs dans $(E,\underline{\underline{E}})$. Plutôt que d'exiger la mesurabilité de $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$, nous exigerons (ce qui est plus facile à vérifier, et se prête aussi bien aux démonstrations) que <u>les v.a. T_n,X^n correspondantes soient $\underline{\underline{A}}^*$-mesurables</u>.

Nous commencerons par supposer que pour tout ω l'ensemble $P(\omega)$ des sauts est non borné des deux côtés. Mais ce n'est pas indispensable, et nous lèverons cette hypothèse par la suite.

Désignons maintenant par W le sous-ensemble de Ω formé des $\omega\in\Omega$ tels que $T_0(\omega)=0$, i.e. des ω qui sautent à l'instant 0. C'est un ensemble de mesure nulle pour P. Nous le munirons de la tribu induite par $\underline{\underline{A}}^*$. Si $w\in W$, nous poserons $sw = \theta_{T_1(w)}w \in W$, de sorte que $T_n(sw) = T_{n+1}(w)-T_1(w)$, et que $X^n(sw) = X^{n+1}(w)$: s est mesurable de W dans W, et c'est en fait une bijection mesurable, toutes les puissances de s s'écrivant $s^n w = \theta_{T_n(w)}w$ $(n\in\underline{\underline{Z}})$. On pose aussi $f(w)= T_1(w)$, c'est une fonction partout >0 sur W, finie.

Formons $\overline{W} = W\times\mathbb{R}$, dans lequel nous distinguons comme dans l'exposé I les "boîtes" $\overline{W}_n$, $\widetilde{W} =\overline{W}_1$; introduisons les $\overline{\theta}_t$ sur $\overline{W}$, les $\widetilde{\theta}_t$ sur $\widetilde{W}$, l'application $\overline{s}$, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Et maintenant, définissons une application de $\overline{W}$ dans Ω , mesurable d'après I.(2.3).

$$\overline{\varphi}(w,u) = \theta_u w$$

qui commute évidemment avec $\overline{\theta}_t$ et θ_t $(\overline{\varphi}\overline{\theta}_t=\theta_t\overline{\varphi})$. $\overline{\varphi}$ applique évidemment $\overline{W}$ sur Ω , car tout ω se ramène par translation(de n'importe quel $t=T_n(\omega)$) dans l'ensemble W. La relation d'équivalence $\overline{\varphi}(w,u)= \overline{\varphi}(w',u')$ est exactement $\mathcal{R}$, de sorte que $\varphi = \overline{\varphi}|_{\widetilde{W}}$ est une bijection[1] de $\widetilde{W}$ sur Ω . Elle commute avec $\widetilde{\theta}_t$ et θ_t par passage au quotient. La mesure obtenue en ramenant P sur $\widetilde{W}$ est donc invariante par les $\widetilde{\theta}_t$, et la proposition 2 nous dit qu'elle peut s'écrire $\mu\otimes\ell$, où μ <u>est une mesure positive σ-finie sur</u> W, <u>invariante par</u> s . On rappelle que W est muni de la tribu induite par $\underline{\underline{A}}^*$, non complétée pour P.

DEFINITION. <u>La mesure</u> μ <u>sur</u> $(W,\underline{\underline{A}}^*)$ <u>est la mesure de PALM du processus ponctuel discret</u>.

Il est agréable de considérer μ comme une mesure sur Ω portée par W . Lorsqu'on ne suppose pas que $P(\omega)$ est non borné des deux côtés pour tout ω , on se restreint simplement à l'ensemble Ω_0 des ω tels que $P(\omega)$ soit non borné, dans lequel on construit W_0 comme ci-dessus, et la mesure de PALM est considérée comme une mesure sur Ω portée par W_0 .

Le théorème suivant est une importante caractérisation de la mesure de PALM, due à MECKE (Stationäre zufällige Masze auf lokalkompakten Abelschen Gruppen, Z.W-th. 9, 1967, p.36.58). Rappelons

---

1 La bijection réciproque s'écrit $\omega\mapsto(\theta_{T_0}(\omega),-T_0(\omega))$, elle est donc aussi mesurable.

que (N_t) est l'hélice croissante qui compte les sauts du processus ponctuel (X_t) entre 0 et t (exposé I, § 2). Nous devons remercier NEVEU de nous avoir fait connaître l'article de MECKE.

Pour des raisons de simplicité, nous supposons à nouveau que $P(\omega)$ est non borné pour tout ω , mais les résultats s'étendent immédiatement au cas général .

T1 THEOREME. Soit h une fonction sur $\Omega\times\mathbb{R}$, $\underline{\underline{A}}^*\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable et positive. On a alors

$$(1.1) \qquad E[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_t\omega,t)dN_t(\omega)] = \int_{W\times\mathbb{R}} h(w,t)\mu(dw)dt$$

DEMONSTRATION. Identifions Ω à $\tilde{W}$. Le membre de gauche est l'espérance d'une somme, correspondant aux différents sauts du processus ponctuel. Le premier terme est, par exemple

$$E[\ h(\theta_{T_1}\omega,T_1(\omega))\ ] \ , \quad \text{sur } \tilde{W} \quad \int h(sw,f(w)-u)\mu(dw)du$$

de même $E[\ h(\theta_{T_0}\omega,T_0(\omega))\ ] \ , \quad \text{sur } \tilde{W} \quad \int h(w,-u)\mu(dw)du$

etc. On reconnaît dans le membre de gauche l'intégrale de la fonction $h'(w,u)=h(w,-u)$ sur $\overline{W}$, par rapport à la mesure périodifiée $\overline{P}$ de P. Mais celle-ci vaut $\mu\otimes\ell$. On change u en -u et on obtient le côté droit.

Cette formule a des corollaires importants. Le premier :

T2 THEOREME. La masse totale de la mesure de PALM μ sur W est le paramètre $p=E[N_1]$ du processus ponctuel (le nombre moyen de sauts par unité de temps).

DEMONSTRATION. La formule (1.1) avec $h(\omega,t) = I_{]0,1]}(t)$.

La supériorité de la formule (1.1) apparait bien lorsqu'on essaie de démontrer directement ce théorème : on se place sur $\tilde{W}$ et on a

$$E[N_1] = \sum_1^{\infty} P\{N_1\geqq k\} = \sum_1^{\infty}\int_{\tilde{W}} I_{\{f_k(y)-u\leqq 1\}}\mu(dy)du$$
$$= \sum_1^{\infty}\int_0^{\infty}\mu(dy)\int_{f(y)\wedge(f_k(y)-1)}^{f(y)} du$$

Le premier terme de cette somme est l'intégrale par rapport à μ de $f-(f-1)^+ = f\wedge 1$. On démontre alors par récurrence que la somme des k premiers termes est $\int f_k\wedge 1\, d\mu$, et le théorème en résulte. C'est beaucoup plus compliqué que (1.1).

REMARQUE. La mesure de PALM n'est pas absolument continue par rapport à P (d'où nos précautions quant aux complétions). Cependant, si $H \in \underline{\underline{A}}^o$ est P-polaire, i.e. si le processus $(I_H \circ \Theta_t)$ est P-indistinguable de 0, alors $\mu(H)=0$: prendre dans la formule (1.1) $h(\omega,t)= I_H(\omega)$. Cela s'applique en particulier au cas où H est invariant et $P(H)=0$.

Ensuite, considérons un ensemble $H \in \underline{\underline{A}}^o$ (on peut étendre cela à $H \in \underline{\underline{A}}^*$, mais peu importe). Définissons un nouveau processus ponctuel X_t^H en posant

$$X_t^H(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } \Theta_t\omega \in H \ , \quad X_t^H(\omega) = \partial \quad \text{sinon} .$$

On peut déterminer la mesure de PALM de ce processus ponctuel :

T3 THEOREME. La mesure de PALM de (X_t^H) est $I_H.\mu$

DEMONSTRATION. Construisons l'hélice N_t^H qui compte les sauts de (X_t^H) : on a $dN_t^H = I_H \circ \Theta_t dN_t$, et par conséquent, avec les notations de (1.1)

$$E[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\Theta_t\omega,t)dN_t^H(\omega)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\Theta_t\omega,t)I_H(\Theta_t\omega)dN_t(\omega)]$$
$$= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} h(w,t)I_H(w)\mu(dw)dt$$

et on voit apparaître à droite la mesure $I_H.\mu$

D'où la valeur de $\mu(H)$ elle même : c'est le paramètre du processus croissant X_t^H .

INTERPRETATION DE LA MESURE DE PALM

Identifions Ω à $\tilde{W}$. L'événement { il y a au moins un"point'entre $-\varepsilon$ et 0 } est représenté dans $\tilde{W}$ par la bande

$$B_\varepsilon = \{(w,t) \ : \ t<f(w)\wedge\varepsilon \}$$

Alors, pour tout $H \subset W$, $\underline{\underline{A}}^*$-mesurable

$$\frac{1}{\varepsilon}P(\{(w,t) \ : \ w \in H \ , \ t<f(w)\wedge\varepsilon\})= \int_H \frac{f(w)\wedge\varepsilon}{\varepsilon} \mu(dw)$$

Si $\mu(H) < \infty$, on peut appliquer du côté droit le théorème de convergence dominée, et il vient

$$\mu(H) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}P\{ w \in H \ , \ t<f(w)\wedge\varepsilon \}$$

En particulier, si le paramètre est fini, on peut appliquer ceci à $H=\Omega$, et diviser, de sorte que

$$\frac{\mu(H)}{p} = \lim_\varepsilon \frac{P\{w \in H, \ t<f(x)\wedge\varepsilon\}}{P\{t<f(x)\wedge\varepsilon \}}$$

Le second membre est la probabilité conditionnelle pour que $X^0 \in H$, sachant qu'il y a un saut entre $-\varepsilon$ et 0. D'où l'interprétation intuitive de $\mu(H)$: probabilité conditionnelle de H, sachant qu'il y a un " saut" à l'instant 0 .

2. FILTRATION DU FLOT SOUS UNE FONCTION

Nous revenons à la situation de l'exposé I : une " cascade" $(\Omega,\underline{\underline{A}},s,\mu)$, une fonction f , et nous construisons le flot bâti sous f

(2.1) $\tilde{\Omega} = \{(y,u)\in\Omega\times\mathbb{R} : 0\leq u<f(y)\}$

(2.2) $\tilde{\underline{\underline{A}}}^{o}= \underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$

La notation a été légèrement changée : cette tribu n'étant pas complétée, nous la munissons d'un ^{o} , et nous désignerons par $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ sa complétée pour la mesure $P=\mu\otimes\ell|_{\tilde{\Omega}}$. De même, nous enlèverons les $\tilde{}$ au dessus des opérateurs de translation θ_t , les dangers de confusion ayant disparu.

Nous nous donnons maintenant une tribu $\underline{\underline{A}}_0$ sur Ω filtrant la cascade : $\underline{\underline{A}}_0\subset \underline{\underline{A}}$ et $s^{-1}(\underline{\underline{A}}_0)\subset\underline{\underline{A}}_0$, et nous posons comme d'habitude $\underline{\underline{A}}_n = s^n(\underline{\underline{A}})$, famille croissante de tribus. Nous supposerons que $\underline{\underline{A}}=\bigvee_n \underline{\underline{A}}_n$. Nous pouvons associer aux $\underline{\underline{A}}_n$ les tribus sur $\tilde{\Omega}$

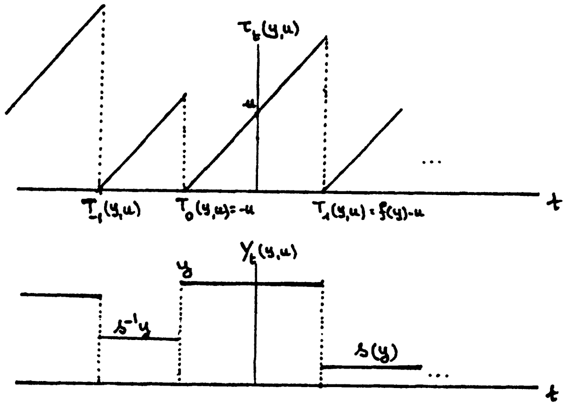
(2.3) $\tilde{\underline{\underline{A}}}^{o}_n = \underline{\underline{A}}_n\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\tilde{\Omega}}$

Nous noterons X_t la v.a. $(y,u)\mapsto \theta_t(y,u)$ sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}})$, <u>considérée comme prenant ses valeurs dans</u> $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}}^{o}_0)$. La composante de $X_t(y,u)$ suivant Ω sera notée $Y_t(y,u)$ [par exemple, $Y_0(y,u)= y$], et la composante suivant $\mathbb{R}$, $\tau_t(y,u)$ [$\tau_0(y,u)=u$] .

On peut " dessiner" les trajectoires des deux processus τ_t, Y_t . Celles de (τ_t) sont des fonctions en dents de scie, dont les sauts successifs sont les valeurs

$$T_k(y,u) = f_k(y) - u$$

et celles de (Y_t) des fonctions en escalier continues à droite.



L'application $(t,\tilde{\omega}) \mapsto X_t(\tilde{\omega})$ est donc mesurable pour la tribu $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^o$: si $h(y,u)$ est une fonction $\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$-mesurable de la forme $a(y)b(u)$, où a est continue sur $\mathbb{R}$, b bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{A}}_0)$, le processus $h\circ X_t$ est continu à droite, donc mesurable. On passe de là au cas général par le raisonnement habituel.

Nous avons mentionné au §1 l'existence d'un processus ponctuel fondamental dans le flot sous f : c'est celui dont les instants de sauts sont les T_n , l'espace d'états étant $(E,\underline{\underline{E}})=(\Omega,\underline{\underline{A}}_0)$, et les positions aux instants de saut étant les v.a. $Y^n = Y_{T_n}$.

DEFINITION. <u>La tribu</u> $\underline{\underline{A}}_0$ <u>étant fixée sur</u> Ω , <u>on pose</u>

$$(2.4) \qquad \underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(X_s\ ,\ s\leq t\ )$$

(famille naturelle du processus (X_t) à valeurs dans $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0)$). Cette filtration est appelée la <u>filtration naturelle</u> du flot sous f, associée à la filtration discrète $(\underline{\underline{A}}_n)$ sur Ω .

En fait, il est bon de distinguer les filtrations dues aux deux composantes :

$$(2.5) \qquad \underline{\underline{G}}^o_t = \underline{\underline{T}}(Y_s\ ,\ s\leq t\ )$$

$$(2.6) \qquad \underline{\underline{H}}^o_t = \underline{\underline{T}}(\tau_s\ ,\ s\leq t\ )$$

Ces filtrations ne sont vraiment utiles que si l'hypothèse suivante , introduite par GUREVIČ (Conditions pour l'existence d'une K-partition d'un flot spécial. Tr. Mosk. Mat. Obšč. 17. 89-116 (1967)) est satisfaite[1].

P1 PROPOSITION 1. <u>Si</u> f <u>est</u> $\underline{\underline{A}}_1$<u>-mesurable</u>, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}^o_0 = \tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$. <u>La famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, <u>sans complétion</u>, <u>est continue à droite</u>, <u>et les</u> T_n $(n>0)$ <u>en sont des temps d'arrêt</u> . <u>On a</u> $\underline{\underline{F}}^o_\infty = \tilde{\underline{\underline{A}}}^o$.

<u>Si</u> f <u>est</u> $\underline{\underline{A}}_0$<u>-mesurable</u>, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}^o_{T_1-} = \tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$ <u>et</u> $\underline{\underline{F}}^o_{T_1} = \tilde{\underline{\underline{A}}}^o_1$, <u>et dans ce cas le temps d'arrêt</u> T_1 <u>est prévisible</u>.

DEMONSTRATION. 1) X_0 est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable par définition , donc ses deux coordonnées le sont . La première est $(y,u)\mapsto y$, à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{A}}_0)$, la seconde $(y,u)\mapsto u$. Donc $\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0\subset\underline{\underline{F}}^o_0$.

Supposons f $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable, et établissons l'inclusion inverse. Toutes les fonctions $(y,u)\mapsto -u$, $(y,u)\mapsto f(s^{-k}y)$ pour $k>0$, sont $\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$-mesurables, donc aussi les fonctions $(y,u)\mapsto T_n(y,u)$ $(n\leq 0)$, et

---

1 Les résultats qui suivent sur la filtration du flot sous une fonction sont empruntés à l'un des mémoires (non encore publié) de la thèse de J. de Sam Lazaro, à l'exception bien sûr d'une ou deux remarques très simples, qui font partie du folklore des flots.

$Y^n(y,u) = f(s^{-n}y)$ ($n \leq 0$). Il suffit alors d'écrire explicitement les fonctions $\tau_t(y,u)$, $Y_t(y,u)$ en fonction des T_n, Y^n pour vérifier que tous les X_t ($t \leq 0$) sont $\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$-mesurables, donc que $\underline{\underline{F}}^o_0 \subset \tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$.

[Il est agréable de savoir que la condition de mesurabilité ne peut être améliorée. En effet, si les τ_t ($t \leq 0$) sont $\tilde{\underline{\underline{A}}}^o_0$-mesurables, un instant de réflexion (nécessaire à cause de l'absence de complétion des tribus) montrera que les T_n ($n \leq 0$) le sont aussi, donc aussi $T_0 - T_{-1}$. Autrement dit , $(y,u) \mapsto f \circ s^{-1}(y)$ est $\underline{\underline{A}}_0 \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mes. sur $\tilde{\Omega}$. Sous des hypothèses très faibles (celles qu'on ajoutera ci-dessous) sur les tribus $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}_0$ et sur f, cela entraîne que $f \circ s^{-1}$ est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable.]

2) Soit $(U, \underline{\underline{U}})$ l'espace d'états $(\Omega \times \mathbb{R}\ ,\ \underline{\underline{A}}_0 \times B(\mathbb{R}))$, et soit (Z_t) le processus $(Y_t, \tau_t - t)$ à valeurs dans $(U, \underline{\underline{U}})$. La raison pour laquelle on a pris $\tau_t - t$ est que le processus (Z_t) est continu à droite pour la topologie <u>discrète</u> sur U, et on a encore $\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(Z_s, s \leq t)$. On va montrer que $\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{F}}^o_{t+}$. Le cas t=0 suffira.

Notons Z^n_t le processus $Z_{t \wedge 1/n}$ ($t \in \mathbb{R}$), et Z^∞_t le processus $Z_{t \wedge 0}$. Soit h une v.a. $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$-mesurable, donc $\underline{\underline{F}}^o_{1/n}$ -mesurable pour tout n . Il existe alors une fonction H_n sur $U^{\mathbb{R}}$ muni de la tribu produit $\underline{\underline{U}}^{\mathbb{R}}$, telle que

$$h(\omega) = H_n(\ Z^n_t(\omega),\ t \in \mathbb{R}\ )$$

Soit $H = \liminf H_n$. Pour tout ω on a pour n assez grand $Z^n_\cdot(\omega) = Z^\infty_\cdot(\omega)$, donc aussi $H_n(Z^n_t(\omega), t \in \mathbb{R}\ ) = H_n(Z^\infty_t(\omega),\ t \in \mathbb{R}\ ) = h(\omega)$ est indépendant de n, et vaut $H(Z^\infty_t(\omega),\ t \in \mathbb{R})$. La formule $h = H(Z^\infty_t\ ,\ t \in \mathbb{R}\ )$ montre que h est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable.

3) Montrons que T_1 est un temps d'arrêt (les suivants se traitent de manière analogue). Soit T^ε l'inf des t rationnels > 0 tels que $\tau_t < \varepsilon$; T^ε est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, et $T^\varepsilon \uparrow T_1$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, donc T_1 est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, et on conclut en remarquant que $\underline{\underline{F}}^o_{t+} = \underline{\underline{F}}^o_t$.

4) Y_{T_n} , v.a. à valeurs dans $\underline{\underline{A}}_0$, est $\underline{\underline{F}}^o_\infty$ -mesurable pour tout n, autrement dit $(y,u) \mapsto s^n y$ à valeurs dans $(\Omega, \underline{\underline{A}}_0)$, ou encore $(y,u) \mapsto y$ à valeurs dans $(\Omega, \underline{\underline{A}}_n)$, est $\underline{\underline{F}}^o_\infty$-mesurable. Comme $\underline{\underline{A}} = \bigvee_n \underline{\underline{A}}_n$, on voit que $\underline{\underline{F}}^o_\infty$ contient la tribu $\tilde{\underline{\underline{A}}}$. L'inclusion inverse est évidente.

5) Supposons f $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable. Dans ce cas T_1 est une v.a. $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable >0 , on peut l'approcher par une suite croissante S^n de v.a. $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurables, partout > 0 et < T_1 . Les S^n sont des t.d'a. annonçant

T_1 . On procède alors par récurrence pour les autres T_n (n>0).

6) La tribu $\underline{\underline{\tilde{A}}}^o_0 = \underline{\underline{F}}^o_0$ est contenue dans $\underline{\underline{F}}^o_{T_1}$ du fait que 0 et T_1 sont des temps d'arrêt avec $0<T_1$. Dans l'autre sens, la tribu $\underline{\underline{F}}^o_{T_1-}$ est engendrée, par définition, par les ensembles de la forme $H\cap\{t<T_1\}$, où $H\in\underline{\underline{F}}^o_t$. L'événement $\{t<T_1\} = \{(y,u) : t<f(y)-u\}$ appartient à $\underline{\underline{\tilde{A}}}^o_0$. D'autre part, il suffit de considérer des générateurs de $\underline{\underline{F}}^o_t$, et donc des ensembles H de la forme $\{Y_s\in U\}$, $\{\tau_s\in V\}$ avec $s\leq t$. Si $s\leq 0$ il n'y a rien à démontrer. Si $0<s\leq t$, on remarque que sur $\{t<T_1\}$ on a $Y_s=Y_0$, $\tau_s=\tau_0+s$. Plus généralement, $\underline{\underline{F}}^o_{T_2-} = \underline{\underline{\tilde{A}}}^o_1$ etc .

7) L'application $(y,u)\mapsto u$ est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable, donc $\underline{\underline{F}}^o_{T_1}$-mesurable. L'application $(y,u)\mapsto sy$ à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{A}}_0)$ l'est aussi , car c'est X_{T_1}. Donc $(y,u)\mapsto y$ à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{A}}_1)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{T_1}$-mesurable, et on déduit de tout cela que $\underline{\underline{A}}_1\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})= \underline{\underline{\tilde{A}}}^o_1$ est contenue dans $\underline{\underline{F}}^o_{T_1}$. Pour obtenir l'inclusion inverse, on remarque que $\underline{\underline{F}}^o_{T_1}\subset\underline{\underline{F}}^o_{T_2-}$ du fait que $T_1<T_2$, et $\underline{\underline{F}}^o_{T_2-} = \underline{\underline{\tilde{A}}}^o_1$. Plus généralement, $\underline{\underline{F}}^o_{T_2}=\underline{\underline{\tilde{A}}}^o_2$, etc.

UTILISATION DES ESPACES DE BLACKWELL

Nous allons maintenant faire l'hypothèse suivante : la tribu $\underline{\underline{A}}$ sur Ω est une tribu de BLACKWELL, la tribu $\underline{\underline{A}}_0$ qui filtre la " cascade" est séparable (donc aussi une tribu de BLACKWELL). Nous allons étudier des questions de mesurabilité un peu plus fines. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les atomes de $\underline{\underline{A}}$ sont les points de Ω .

Notre premier résultat concerne la comparaison entre les tribus $\underline{\underline{H}}^o_t$ et $\underline{\underline{G}}^o_t$ engendrées respectivement par les composantes spatiale (Y_t) et temporelle (τ_t) de (X_t).

P2 PROPOSITION. Supposons que $\{\omega : s\omega=\omega\}$ soit μ-négligeable. Alors il existe un ensemble s-invariant Ω_0 portant μ , tel que l'on ait pour tout t $\underline{\underline{H}}^o_t|_{\tilde{\Omega}_0}\subset\underline{\underline{G}}^o_t|_{\tilde{\Omega}_0}$ ($\tilde{\Omega}_0=(\Omega_0\times\mathbb{R})\cap\tilde{\Omega}$, ensemble invariant portant P).

DEMONSTRATION. Soit (C_k) une suite d'ensembles engendrant $\underline{\underline{A}}_0$, et soit c la fonction $\sum 3^{-k}I_{C_k}$; la fonction réelle bornée c engendre $\underline{\underline{A}}_0$. Le processus $(c\circ Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus réel à trajectoires en escalier (continues à droite et pourvues de limites à gauche pour la topologie discrète sur $\mathbb{R}$), constant entre les sauts T_n . Notons T'_m ses sauts , numérotés à partir de 0 à la manière des sauts d'un processus ponctuel discret. Les T'_m figurent parmi les T_n, nous les appellerons les sauts <u>vus sur la composante spatiale</u>.

Le saut $T_n(\omega,u)$ est non vu si et seulement si $c(s^{n-1}\omega)= c(s^n\omega)$, i.e. si $s^{n-1}\omega$ et $s^n\omega$ sont dans le même atome de $\underline{\underline{A}}_0$. Mais alors, $c\circ s^{-1}$ étant $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable, on a $c(s^{n-2}\omega)=c(s^{n-1}\omega)$ etc. Autrement dit, si $T_n(\omega,u)$ est non vu, tous les sauts $T_{n-i}(\omega,u)$ sont non vus, et l'ensemble des $T'_m(\omega,u)$ est borné inférieurement.

Soit Ω_o l'ensemble des ω tels que pour tout $n\in Z$, on ait $c(s^{n+1}\omega) \neq c(s^n\omega)$. C'est évidemment un ensemble invariant, et tous les sauts $T_n(\omega,u)$ sont vus pour $\omega\in\Omega_o$. D'autre part, jetons une fois pour toutes l'ensemble des ω tels que $\omega=s\omega$ (invariant, μ-négligeable par hypothèse). Alors ω et $s\omega$ figurent dans des atomes différents de $\underline{\underline{A}}$, puisque $\underline{\underline{A}}$ sépare les points, donc dans des atomes différents de $\underline{\underline{A}}_n$ pour n assez grand, et $s^n\omega$ et $s^{n+1}\omega$ figurent alors dans des atomes différents de $\underline{\underline{A}}_0$. Donc pour tout ω, au moins un saut est vu.

Ainsi, si $\omega\notin\Omega_o$, l'ensemble des $T'_m(\omega,u)$ est non vide, et borné inférieurement. Mais nous savons que l'ensemble des (ω,u) possédant cette propriété est P-négligeable (exposé 1, prop.1). Cela entraîne que Ω_o^c est μ-négligeable.

Jetons Ω_o^c : pour tout ω, alors, tous les sauts T_n sont vus, et $T_0(\omega,u) = \sup \{ t \text{ rationnels} < 0,\ c\circ Y_t(\omega) \neq c(\omega) \}$ est $\underline{\underline{G}}_0^o$-mesurable. Par translation, il en est de même de $T_0(\Theta_s(\omega,u))$, $s\leq 0$. Mais $\tau_0(\omega,u) = u = -T_0(\omega,u)$, donc $\tau_s = \tau_0\circ\Theta_s = -T_0\circ\Theta_s$ est $\underline{\underline{G}}_0^o$-mesurable pour $s\leq 0$, et cela signifie $\underline{\underline{H}}_C^o \subset \underline{\underline{G}}_0^o$.

[Noter qu'on a pas utilisé seulement la séparabilité de $\underline{\underline{A}}_C$, non la propriété de BLACKWELL]

Pour le second résultat, quelques motivations sont utiles. Nous nous intéressons à un problème étudié par GUREVIČ et TOTOKI, consistant à rechercher à quelles conditions le flot sous f, au dessus d' un K-flot discret, est un K-flot. On se donne donc une K-filtration discrète $(\underline{\underline{A}}_n)$ sur Ω, et l'idée naturelle consiste à supposer f $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable, et à étudier la filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}_t^o)$. Mais si l'on remplace $\underline{\underline{A}}_0$ par $\underline{\underline{A}}_0^*=\underline{\underline{A}}_1$, on obtient une seconde filtration du flot discret, $\underline{\underline{A}}_n^* = \underline{\underline{A}}_{n+1}$, et cette fois f est $\underline{\underline{A}}_0^*$-mesurable, ce qui présente des avantages techniques. La filtration correspondante $\underline{\underline{F}}_t^*$ sur $\tilde{\Omega}$ satisfait à $\underline{\underline{F}}_0^* \supset \underline{\underline{F}}_0^o$, donc $\underline{\underline{F}}_t^* \supset \underline{\underline{F}}_t^o$ pour tout t . Il est intéressant de savoir que (grâce aux propriétés de BLACKWELL)

P3 PROPOSITION . $\underline{\underline{F}}_{-\infty}^* = \underline{\underline{F}}_{-\infty}^o$

DEMONSTRATION. Soit $h(\omega,u)$ une fonction $\underline{\underline{F}}^*_{-\infty}$-mesurable, nous voulons montrer qu'elle est $\underline{\underline{F}}^o_{-\infty}$-mesurable.

Notre hypothèse signifie que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $h\circ\theta_t$ est $\underline{\underline{F}}^*_0$-mesurable sur $\tilde{\Omega}$, ou encore que

$$h(\theta_t(\omega,u)) \text{ est } \underline{\underline{A}}^*_0\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})=\underline{\underline{A}}_1\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}) \text{ mesurable.}$$

Considérons la fonction $(t,(\omega,u))\mapsto h(\theta_t(\omega,u))$; elle est mesurable sur $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times(\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, tribu de BLACKWELL, et la propriété précédente entraîne qu'elle est constante sur les atomes de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times(\underline{\underline{A}}_1\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, tribu séparable. Le théorème de BLACKWELL entraîne l'existence d'une fonction $j(t,\omega,u)$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}_1\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable, telle qu'on ait identiquement

$$h(\theta_t(\omega,u)) = j(t,\omega,u)$$

Soit ε tel que $0<\varepsilon<f(s^{-1}\omega)$; nous avons $\theta_{-u-\varepsilon}(\omega,u)=(s^{-1}\omega,f(s^{-1}\omega))$, donc $\theta_t(\omega,u) = \theta_{t+u+\varepsilon}\theta_{-u-\varepsilon}(\omega,u)$ et

$$h(\theta_t(\omega,u)) = j(t+u+\varepsilon,\ s^{-1}\omega\ ,\ f(s^{-1}\omega)-\varepsilon\ )$$

ou

$$h(\theta_t(\omega,u)) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\ j(t+u+\varepsilon,\ s^{-1}\omega,\ f(s^{-1}\omega)-\varepsilon)I_{\{\varepsilon<f(s^{-1}\omega)\}}$$

et le côté droit est, pour tout t , $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}_0\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable. Donc h est aussi $\underline{\underline{F}}^o_{-\infty}$-mesurable.

Autrement dit, <u>nous ne perdrons rien quant à</u> $\underline{\underline{F}}^o_{-\infty}$ en supposant, dans la suite, que f est $\underline{\underline{A}}_0$ mesurable au lieu de $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable.

Nous reviendrons sur tout cela lorsque nous déterminerons les hélices du flot sous une fonction. Pour l'instant, on change un peu de sujet.

3. LE THEOREME D'AMBROSE-KAKUTANI

Le théorème d'AMBROSE - KAKUTANI se présente comme une condition (nécessaire et suffisante) pour qu'un flot soit isomorphe à un flot sous une fonction. A certains égards, ce n'est pas très intéressant, les flots sous une fonction n'étant absolument pas plus faciles à étudier que les autres. Mais, vu sous un autre angle, le théorème peut être considéré comme une construction de processus ponctuels discrets dans tout flot qui n'est pas absolument trivial. Dans certains cas, celui du mouvement brownien par exemple, c'est un résultat surprenant.

Nous ne donnerons pas d'énoncé formel du théorème, et nous nous bornerons essentiellement au cas ergodique, avec de brèves indications sur le passage au cas non ergodique.

Nous partons d'un flot $(\Omega,\underline{\underline{A}}^{o},P,\theta_t)$, filtré par une famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)_{t\in\mathbb{R}}$ de sous tribus de $\underline{\underline{A}}^o$ telle que $\underline{\underline{A}}^o=\underline{\underline{F}}_{\infty}^o$. Comme d'habitude, nous enlevons les ^{o} pour indiquer l'adjonction de tous les ensembles P-négligeables. Nous supposons que $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ est mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^o$ dans $\underline{\underline{A}}^o$, et de $\underline{\underline{B}}(]-\infty,0[)\times\underline{\underline{F}}_0^o$ dans $\underline{\underline{F}}_0^o$. Nous choisissons un ensemble $A\in\underline{\underline{F}}_0^o$ tel que pour un $r\in\mathbb{R}$ l'ensemble

(3.1) $\qquad A^c\cap\theta_r(A) = B$

ait une probabilité non nulle. De tels ensembles existent toujours dans les flots ergodiques, car si $A\in\underline{\underline{F}}_0^o$ est de probabilité >0 et <1

$$E\left[\frac{1}{t}\int_0^t I_A\circ\theta_r\, I_{A^c}\, dr\right] \to E[I_{A^c}\, E[I_A|\underline{\underline{I}}]] = P(A^c)P(A) \neq 0$$

Mais l'existence de tels ensembles, et même d'un système "P-dense" de tels ensembles, est une propriété bien moins forte que l'ergodicité (voir l'article d'AMBROSE KAKUTANI, Duke M.J. 9, 1952). A étant choisi, quitte à l'échanger avec A^c, nous pouvons supposer que r est >0 .

Nous posons maintenant $H=\lambda\int_{-1/\lambda}^{0} I_A\circ\theta_s\, ds$: c'est une fonction $\underline{\underline{F}}_0^o$ - mesurable, comprise entre 0 et 1, et la fonction $s\mapsto H\circ\theta_s(\omega)$ est, pour tout ω, lipschitzienne de rapport λ . D'autre part, d'après le théorème ergodique local, H converge p.s. vers I_A lorsque $\lambda\to\infty$, de sorte que si l'on pose

(3.2) $\qquad C=\{H<1/4\}\quad ,\quad D=\{H>3/4\}$

ces ensembles diffèrent respectivement de A^c et de A par des ensembles de mesure petite pour λ grand. Donc pour λ assez grand,

(3.3) $\qquad M = C\cap\theta_r(D)$

a une mesure non nulle. Tous ces ensembles sont $\underline{\underline{A}}^o$-mesurables. Je dis que pour presque tout $\omega\in M$ on a $\theta_t\omega\in M$ pour des valeurs de t arbitrairement voisines de $\pm\infty$. En effet, si l'ensemble des $t\geq 0$ tels que $\theta_t\omega\in M$ est borné, par exemple, on a $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_M(\theta_s\omega)ds = 0$, alors que cette limite vaut $E[I_M|\underline{\underline{I}}]$, fonction p.s. >0 sur M.

Nous noterons U l'ensemble invariant des ω tels que $\theta_t\omega\in M$ pour des valeurs de t arbitrairement voisines de $\pm\infty$. Il revient au même d'exiger la même propriété pour des valeurs rationnelles de t, donc $U\in\underline{\underline{A}}^o$. Nous venons de voir que U contient M p.s., donc U est de probabilité >0 : dans le cas ergodique, P(U) vaut alors 1.

1 Noter l'absence d'hypothèse de continuité à droite .

Nous avons aussi $U \in \underline{\underline{F}}_0$: c'est un résultat classique, que nous démontrons rapidement pour être complets :

L1 LEMME. $\underline{\underline{I}} \subset \underline{\underline{F}}_0$ (<u>donc</u> $\underline{\underline{I}} \subset \underline{\underline{F}}_{-\infty}$).

DEMONSTRATION. Soit φ bornée $\underline{\underline{I}}$-mesurable, et soit $\psi = E[\varphi|\underline{\underline{F}}_0]$. Par translation on a $\psi\circ\Theta_t = E[\varphi|\underline{\underline{F}}_t]$, donc (d'après le théorème des martingales, et compte tenu du fait que la filtration est exhaustive) $\varphi = E[\varphi|\underline{\underline{F}}_\infty] = \lim_{+\infty} \psi\circ\Theta_t$. Mais d'après le théorème ergodique, $\psi\circ\Theta_t$ converge au sens de Cesaro vers $E[\psi|\underline{\underline{I}}]$, donc $\varphi = E[\varphi|\underline{\underline{F}}_0|\underline{\underline{I}}]$. Les deux membres ont donc la même norme dans L^2, et ceci entraîne que φ est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable.

Nous allons maintenant travailler sur le flot restreint à U, filtré par la famille $\underline{\underline{F}}^o_t|_U$. <u>Cela suffira complètement dans le cas ergodique</u>.[Pour traiter le cas non ergodique, il faudra recommencer la construction dans l'ensemble invariant U^c, extraire un nouveau flot sous une fonction de la manière décrite ci-dessous, itérer transfiniment ce procédé jusqu'à l'épuisement de Ω, possible si le flot est "propre" au sens d'AMBROSE-KAKUTANI : on renvoie à leur article pour plus de détails].

Ainsi <u>nous supposons désormais que $\Omega=U$</u>.

Soit K l'ensemble

(3.4) $\{ \omega : H(\omega) = 1/2 \ , \ H(\Theta_s\omega) > 1/2 \text{ pour } s \in]-1/4\lambda, 0[\ \}$

Je dis d'abord que K est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable (dans $\Omega=U$): pour écrire que $H\circ\Theta_s > 1/2$ pour $s \in]-1/4\lambda, 0[$, écrire que pour tout ε de la forme 2^{-n} il existe un η de la forme 2^{-m} tel que $H\circ\Theta_s > 1/2 + \eta$ pour tout s <u>rationnel</u> de l'intervalle $]-1/4\lambda+\varepsilon, -\varepsilon[$.

Ensuite, pour tout ω on a $\Theta_t\omega \in K$ pour des valeurs de t arbitrairement voisines de $\pm\infty$. Nous savons en effet (du côté positif, par exemple) qu'il existe de très grands t pour lesquels $\Theta_t\omega \in M$. Alors $\Theta_t\omega \in C$, donc $H(\Theta_t\omega) < 1/4$, et $\Theta_t\omega \in \Theta_r D$, donc $\Theta_{t-r}(\omega) \in D$ et $H(\Theta_{t-r}\omega) > 3/4$. Il existe donc entre t-r et t au moins un s tel que $H(\Theta_s\omega) = 1/2$, je dis que le plus petit de ces s satisfait à $\Theta_s\omega \in K$. En effet, entre t-r et s, $H\circ\Theta_.(\omega)$ est $>1/2$, et varie de 3/4 à 1/2, donc la longueur de cet intervalle est au moins $1/4\lambda$ puisque $H\circ\Theta_.$ est lipschitzienne de rapport λ.

Notons enfin que deux t distincts tels que $\Theta_t\omega \in K$ sont séparés par un intervalle de longueur au moins égale à $1/4\lambda$. On définit donc un processus ponctuel discret en posant

$$Y_t(\omega) = \Theta_t\omega \text{ si } \Theta_t\omega \in K \ , \ Y_t(\omega) = \partial \text{ sinon} .$$

Démontrons rapidement que T_0 est $\underline{\underline{F}}^\circ_0$-mesurable sur Ω=U, ce qui entraînera que toutes les v.a. T_n, Y^n de ce processus ponctuel sont $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables.

Soit $\varepsilon>0$. Soit L_ε l'ensemble de tous les r rationnels <0 tels que $H\circ\Theta_s>1/2$ pour $s\in[r+2\varepsilon-1/4\lambda,r]$ et $H\circ\Theta_r-1/2<\lambda\varepsilon$. Les rationnels de l'intervalle $]T_0-\varepsilon,T_0]$ appartiennent à L_ε , donc $S_\varepsilon=\sup L_\varepsilon$ est $\geq T_0$. Lorsque $\varepsilon\to 0$, L_ε diminue, donc S_ε décroît vers une v.a. S. Comme S_ε est $\underline{\underline{F}}^\circ_0$-mesurable, il en est de même de S . Or on a $H\circ\Theta_S=1/2$, ce qui entraîne que S_ε=S pour ε assez petit. Il en résulte aisément que $S=T_0$.

Prenons W=K, muni de la tribu induite par $\underline{\underline{A}}^\circ$. Prenons $s=\Theta_{T_1}$, automorphisme de W , et $f=T_1$ sur W, fonction partout >0 et finie, dont les itérés tendent vers $\pm\infty$. Formons $\widetilde{W}=\{(w,u)\in W\times\mathbb{R} : 0\leq u<f(w)\}$. Pour $(w,u)\in W\times\mathbb{R}$, posons $\varphi(w,u)=\Theta_u w$. On vérifie comme au paragraphe 1 que φ applique $W\times\mathbb{R}$ sur Ω, induit sur $\widetilde{W}$ une bijection bimesurable de $(\widetilde{W}\ ,\ \underline{\underline{A}}^\circ\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\widetilde{W}})$ sur $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ)$ qui commute avec les translations. D'où l'existence d'une mesure μ invariante par s comme au paragraphe 1, etc. Nous avons établi le théorème d'AMBROSE pour un flot ergodique : un tel flot est isomorphe à un flot sous une fonction f, et cette fonction peut même être choisie bornée inférieurement (ici, par $1/4\lambda$).

QUESTIONS DE FILTRATION

Si l'on identifie $\widetilde{W}$ et Ω au moyen de l'application $(w,u)\mapsto\Theta_u w$, et de l'application réciproque $\omega\mapsto(\Theta_{T_0}(\omega),-T_0(\omega))$, la filtration $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ n'est en général pas du type envisagé au paragraphe précédent. En effet, dans une telle filtration " il ne se passe rien" entre les instants T_i et T_{i+1}. Ce que nous allons montrer ici, c'est que la filtration $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ peut être bien <u>encadrée</u> entre deux telles filtrations.

Nous commençons par faire une hypothèse anodine : dans les calculs précédents, nous n'avons fait aucune hypothèse de continuité sur la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$. <u>Nous supposons dans la suite que</u> $\underline{\underline{F}}^\circ_0=\underline{\underline{F}}^\circ_{0-}$, quitte à changer de notations si nécessaire. Alors W est $\underline{\underline{F}}^\circ_{0-}$-mesurable, ainsi que T_0 , et T_1 <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t-})$, car $\{T_1\leq t\}=\{T_0\circ\Theta_t\geq -t\}\in\Theta_t^{-1}(\underline{\underline{F}}^\circ_{0-})=\underline{\underline{F}}^\circ_{t-}$.

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes, qui ne sont pas déraisonnables, comme nous le verrons dans la suite :

- $\underline{\underline{A}}^\circ$ est une tribu de BLACKWELL
- $\underline{\underline{F}}^\circ_{0-}$ est séparable (donc une tribu de BLACKWELL)
- $\underline{\underline{F}}^\circ_{0-}$ est engendrée par des v.a. h telles que la fonction $h\circ\Theta_\cdot$ soit <u>continue à gauche</u> sur $\mathbb{R}$

Nous verrons plus loin[1], par exemple, que tout flot muni d'une K-filtration est isomorphe à un flot de ce type.

Introduisons alors les tribus suivantes sur W et $\widetilde{W}=\Omega$

(3.5) $\quad \underline{\underline{C}}^o_0 = \underline{\underline{F}}^o_{0-}|_W \quad , \quad \widetilde{\underline{\underline{C}}}^o_0 = \underline{\underline{C}}^o_0 \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\widetilde{W}}$

(3.6) $\quad \underline{\underline{C}}^*_0 = \underline{\underline{F}}^o_{T_1-}|_W \quad , \quad \widetilde{\underline{\underline{C}}}^*_0 = \underline{\underline{C}}^*_0 \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})|_{\widetilde{W}}$

Toutes ces tribus sont séparables, et les tribus (3.5) sont contenues dans les tribus (3.6). Notre premier résultat entraîne que $\underline{\underline{C}}^o_0$ et $\underline{\underline{C}}^*_0$ filtrent le flot discret ; comme $f=T_1|_W$ est $\underline{\underline{C}}^*_0$-mesurab e, $\widetilde{\underline{\underline{C}}}^o_0$ et $\widetilde{\underline{\underline{C}}}^*_0$ filtrent le flot continu (prop.1).

L2 LEMME. <u>On a</u> $\underline{\underline{C}}^*_0 = s^{-1}(\underline{\underline{C}}^o_0)$ <u>sur</u> W .

DEMONSTRATION. Nous utilisons le théorème de BLACKWELL, en montrant que les deux tribus ont les mêmes atomes.

A quelle condition ω et $\omega' \in W$ appartiennent ils au même atome de $\underline{\underline{C}}^*_0$? On a d'abord $T_1(\omega)=T_1(\omega')$. Puis on écrit que ω et ω' appartiennent aux mêmes ensembles générateurs de la forme $A\cap\{t<T_1\}$, $A\in\underline{\underline{F}}^o_{t-}$. Ecrivant A sous la forme $\theta_t^{-1}(H)$, $H\in\underline{\underline{F}}^o_{0-}$, on voit que la condition est

$$T_1(\omega)=T_1(\omega'), \text{ et pour tout } H\in\underline{\underline{F}}^o_{0-} \text{ on a } I_H(\theta_t\omega)=I_H(\theta_t\omega') \text{ pour tout } t<T(\omega)$$

Mais notre hypothèse sur l'existence de fonctions continues à gauche engendrant $\underline{\underline{F}}^o_{0-}$ entraîne alors que $I_H(\theta_t\omega)=I_H(\theta_t\omega')$ pour $t=T(\omega)$ aussi.

Raisonnons de même sur $s^{-1}(\underline{\underline{C}}^o_0)$. L'appartenance à un même atome signifie que pour tout $H\in\underline{\underline{F}}^o_{0-}$ on a $I_H(\theta_{T_1(\omega)}(\omega))=I_H(\theta_{T_1(\omega')}(\omega'))$. Comme T_{-1} est $\underline{\underline{F}}^o_{0-}$-mesurable, on a $T_{-1}(\theta_{T_1}\omega) = T_{-1}(\theta_{T_1}\omega')$, ce qui s'écrit aussi $T_1(\omega)-T_0(\omega)=T_1(\omega')-T_0(\omega')$, et comme ω et ω' sont dans W, $T_1(\omega)=T_1(\omega')$. D'autre part, notons u cette valeur commune. Si l'on a $I_H(\theta_u\omega)=I_H(\theta_u\omega')$ pour tout $H\in\underline{\underline{F}}^o_{0-}$, on peut appliquer cette égalité à $\theta_v^{-1}(H)\in\underline{\underline{F}}^o_{0-}$ pour tout $v<0$, et en déduire que $I_H(\theta_t\omega)= I_H(\theta_t\omega')$ pour tout $t\leq u$.

Les deux tribus ont donc bien les mêmes atomes.

Voici l'encadrement cherché.

P4 PROPOSITION 4. <u>On a</u> $\widetilde{\underline{\underline{C}}}^o_0\subset\underline{\underline{F}}^o_0\subset\widetilde{\underline{\underline{C}}}^*_0$.

Notons tout de suite deux conséquences. Considérons les filtrations $(\underline{\underline{G}}^o_t)$ et $(\underline{\underline{G}}^*_t)$ associées à $\widetilde{\underline{\underline{C}}}^o_0$ et $\widetilde{\underline{\underline{C}}}^*_0$. Le fait que la famille $(\underline{\underline{G}}^*_t)$ soit continue à droite (prop.1) entraîne que $\underline{\underline{F}}^o_{0+}\subset\widetilde{\underline{\underline{C}}}^o_0$. Le fait que $\underline{\underline{G}}^o_{-\infty} = \underline{\underline{G}}^*_{-\infty}$ (prop.3) entraîne que ces tribus sont égales à $\underline{\underline{F}}^o_{-\infty}$. Enfin, le fait que $\underline{\underline{G}}^o_{\infty}=\underline{\underline{G}}^*_{\infty}$ (prop.1) entraîne que les filtrations sont exhaustives.

1 Voir exposé VI, p.13, la remarque.

DEMONSTRATION. Ici encore, nous utiliserons le théorème de BLACKWELL. Deux points (ω,u) et (ω',u') de $\widetilde{W}$ appartiennent au même atome

- de $\underline{\underline{\widetilde{C}}}_0^o$ si $u=u'$, $I_H(\theta_t\omega)=I_H(\theta_t\omega')$ pour $H\in\underline{\underline{F}}_{0-}^o$, $t<0$

- de $\underline{\underline{F}}_{0-}^o$ si $I_H(\theta_t(\omega,u))=I_H(\theta_t(\omega',u'))$ pour $H\in\underline{\underline{F}}_{0-}^o$, $t<0$. Comme $T_0(\omega,u) = -u$ est $\underline{\underline{F}}_{0-}^o$-mesurable, cela entraîne $u=u'$. Ensuite, nous avons $\omega=(\omega,0) = \theta_{-u}(\omega,u)$, donc la relation $I_H(\theta_t(\omega,u))=I_H(\theta_t(\omega',u))$ pour $t<0$ entraîne $I_H(\theta_{t-u}(\omega,u))=I_H(\theta_{t-u}(\omega',u))$, et enfin $I_H(\theta_t\omega)=I_H(\theta_t\omega')$ pour $t<0$

- de $\underline{\underline{\widetilde{C}}}_0^*$ si $u=u'$, $I_H(\theta_t\omega)=I_H(\theta_t\omega')$ pour $t<T_1(\omega,u)=T_1(\omega',u')=u$

Il est alors évident que les trois relations d'équivalence associées aux trois tribus sont de plus en plus fines, d'où les inclusions énoncées.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

Les mesures de PALM, les processus ponctuels (stationnaires ou non) ont donné lieu à une bibliographie considérable. La présentation traditionnelle est celle de

KHINTCHINE (A.Ya.). Mathematical methods in the theory of queuing (traduction) Griffin, 1960

qui contenait la première démonstration rigoureuse (mais bien peu instructive) de l'existence de la mesure de PALM. Il faut citer ensuite

RYLL-NARDZEWSKI (C.). Remarks on processes of calls. Proc. 4-th Berkeley Symp. t.2, p.455-465 (1961)

et sur la réalisation canonique des processus ponctuels discrets, la Note aux C.R. de NEVEU , t.267, 1968, p.561-564.

Enfin, citons un article tout récent :

CHUNG (K.L.) . Crudely stationary stochastic processes. Amer. Math. Monthly 79, 1972, p.867-877 .

Nous avons traité à part la théorie des mesures de PALM des processus ponctuels discrets. Nous verrons dans l'exposé IV qu'elle entre dans la théorie beaucoup plus générale des mesures de PALM des hélices croissantes (théorème de MECKE).