Paul-André Meyer

Une représentation de surmartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 310-315

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__310_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

UNE REPRESENTATION DE SURMARTINGALES

par P.A. Meyer

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,\underline{\underline{F}}_t)$ un espace probabilisé muni d'une famille de tribus satisfaisant aux conditions habituelles, et soit (X_t) le potentiel engendré par un processus croissant intégrable prévisible (B_t). On sait que (X_t) peut être borné sans que (B_t) le soit, l'inégalité $X_t \leqq c$ pour tout t entraînant seulement que $E[B_t^k] \leq k!c^k$ pour k entier positif. GARSIA a posé le problème suivant : existe t'il un processus croissant <u>non nécessairement adapté</u> (C_t) tel que l'on ait pour tout temps d'arrêt T $X_T=E[C_\infty-C_T|\underline{\underline{F}}_T]$, et qui soit <u>borné</u> ? Un tel problème paraît inabordable à première vue, car on ne connaît aucun procédé permettant de choisir raisonnablement un processus croissant non adapté parmi tous ceux qui engendrent X. Il se trouve cependant que le problème admet une réponse affirmative, le processus croissant en question s'obtenant comme sous-produit d'une formule explicite qui traîne dans l'article [1]. Il apparaît aussi, après coup, que le problème est étroitement lié à celui des décompositions multiplicatives des surmartingales.

Une remarque avant de commencer : si l'on perd l'adaptation, il n'y a aucune raison d'écrire $X_T=E[C_\infty-C_T|\underline{\underline{F}}_T]$; il est beaucoup plus simple d'introduire le processus décroissant $(D_t)=(C_\infty-C_t)$, et de se demander si <u>toute surmartingale positive bornée est projection bien-mesurable d'un processus décroissant</u> (<u>non adapté</u>) <u>borné</u> .

RESOLUTION DU PROBLEME

PROPOSITION. <u>Soit</u> (X_t) <u>une surmartingale continue à droite, positive et majorée par</u> 1 . <u>Soit</u> $(\dot{X}_t)$ <u>la projection prévisible de</u> (X_t), <u>et soit</u> (B_t) <u>le processus croissant prévisible engendrant</u> (X_t)*. <u>Alors</u> (X_t) <u>est projection bien-mesurable du processus décroissant non adapté suivant, majoré par</u> 1

$$(1) \qquad D_t = 1 - \exp\left(- \int_t^\infty \frac{dB_s^c}{1-\dot{X}_s} \right) \prod_{t<s\leqq+\infty} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1-\dot{X}_s}\right)$$

<u>où</u> (B_t^c) <u>est la partie continue de</u> (B_t) .

* On ne suppose pas que X est un potentiel, et on fait les conventions usuelles : $X_\infty=0$, $X_{\infty-} = \lim X_t$, $\dot{X}_\infty=0$, $B_\infty-B_{\infty-}=X_{\infty-}$, qui permettent d'avoir la formule usuelle $X_t=E[B_\infty-B_t|\underline{\underline{F}}_t]$

DEMONSTRATION. Nous allons d'abord supposer que (X_t) est majoré par $1-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). Dans ce cas, il n'y a aucune difficulté d'intégrabilité quant à $\int_u^v \frac{dB_{s-}}{1-\dot{X}_s}$, et nous introduirons le processus croissant prévisible intégrable

$$(2) \qquad A_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-\dot{X}_s}$$

Si T est un temps d'arrêt prévisible, nous savons que $\Delta B_T = X_{T-} - E[X_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] = X_{T-}-\dot{X}_T \leq 1-\varepsilon-\dot{X}_T$, d'où l'on tire $\Delta A_T \leq 1-\varepsilon$. Comme les sauts de (A_t) peuvent être épuisés par des temps d'arrêt prévisibles, on a identiquement $\Delta A_t \leq 1-\varepsilon$, et aussi $\Delta A_t \leq \Delta B_t/\varepsilon$. On peut donc introduire le processus décroissant suivant, où le produit infini est convergent et ne comporte que des termes strictement positifs

$$(3) \qquad M_t = \exp(-A_t^c)\prod_{s\leq t}(1-\Delta A_s)$$

On a $M_0=1$, (M_t) ne s'annule jamais, et (M_t) est prévisible : pour le voir, décomposer (A_t) en (A_t^c) et une somme de processus croissants prévisibles à un seul saut. (M_t) est solution de l'équation différentielle $dM_s/M_{s-}= -dA_s$. Nous posons enfin

$$(4) \qquad C_t = M_\infty\left(\frac{1}{M_t}-1\right) \quad , \; D_t=C_\infty-C_t = 1-\frac{M_\infty}{M_t}$$

Le processus (D_t) est celui qui est donné par la formule (1). Incidemment, le raisonnement précédent montre, lorsque (X_t) est seulement majoré par 1, que tous les facteurs du produit infini de (1) sont positifs (mais certains peuvent être nuls, ceux pour lesquels $X_{s-}=1$, $\dot{X}_s<1$).

Nous vérifions que (X_t) est projection bien-mesurable de (D_t). Pour alléger les notations, nous montrerons seulement que $X_0=E[D_0|\underline{\underline{F}}_0] = E[1-M_\infty|\underline{\underline{F}}_0]$. Nous écrivons

$$(5) \quad E[1-M_\infty|\underline{\underline{F}}_0] = E[\int_0^\infty -dM_s|\underline{\underline{F}}_0] = E[\int_0^\infty M_{s-}dB_s-\dot{X}_s dM_s|\underline{\underline{F}}_0]$$

où nous avons utilisé la formule $dM_s= -M_{s-}dA_s$, ou $(1-\dot{X}_s)dM_s = -M_{s-}dB_s$. Le processus $(B_\infty-B_t)$ admet $(\dot{X}_t)$ comme projection prévisible ; le processus (M_t) étant prévisible, le dernier membre de (5) est égal à

$$E[\int_0^\infty M_{s-}dB_s-(B_\infty-B_s)dM_s|\underline{\underline{F}}_0] = E[\int_0^\infty d(M_sB_s)-B_\infty dM_s|\underline{\underline{F}}_0]$$
$$= E[M_\infty B_\infty-B_\infty(M_\infty-1)|\underline{\underline{F}}_0] = E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_0] = X_0 \quad \text{(cqfd)}.$$

Cela achève le cas où X est majoré par $1-\varepsilon$. Pour passer au cas général, nous prenons $\lambda \in]0,1[$ et nous appliquons le résultat qui précède à λX, qui nous apparaît comme projection bien-mes. de

(6) $$D_t^\lambda = 1 - \exp\left(-\int_t^\infty \frac{\lambda dB_s^c}{1-\lambda \dot{X}_s} \right) \prod_{s>t} \left(1 - \frac{\lambda \Delta B_s}{1-\lambda \dot{X}_s} \right)$$

Lorsque $\lambda \uparrow 1$, D_t^λ , processus décroissant continu à droite, croît vers un processus décroissant continu à droite. Une interversion d'inf montre que ce processus décroissant n'est autre que (D_t), et la proposition est établie.

REMARQUE . (X_t) est aussi projection bien-mesurable de $\frac{1}{\lambda} D_t^\lambda \neq D_t$. On constate bien l'absence d'unicité.

UNE VARIANTE DU PROBLEME

Considérons un processus croissant (B_t) adapté et continu à gauche , tel que $B_{0-}=0$ (mais pouvant comporter un saut en 0). Considérons la surmartingale non continue à droite (X_t) telle que

(7) $$X_T = E[B_\infty - B_T | \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T$$

(c'est une surmartingale " régulière" : $T_n \uparrow T \Rightarrow E[X_{T_n}] \downarrow E[X_T]$). Supposons (X_t) bornée par 1 : est ce que (X_t) est projection bien-mesurable d'un processus décroissant continu à gauche borné par 1 , analogue à (1) ? La réponse est affirmative, et nous donnerons simplement la formule :

(8) $$D_t = 1 - \exp\left(\int_t^\infty \frac{dB_s^c}{1-X_s} \right) \prod_{s \geqq t} \left(1 + \frac{\Delta B_s}{1-X_s}\right)^{-1}$$

GENERALISATION DU PROBLEME DE GARSIA

Nous nous posons maintenant le problème suivant : soit (X_t) une surmartingale positive engendrée par (B_t), et soit $X^* = \sup_t X_t$. Existe t'il un processus décroissant non adapté (D_t) dont la projection bien-mesurable soit X, et qui soit majoré par X^* ? Nous allons établir ce résultat , en commençant par un calcul formel beaucoup plus général.

Soit (L_t) un processus quelconque, mais mesurable et positif, dont la projection prévisible $(\dot{L}_t)$ majore (X_{t-}), pour $t>0$: il suffit bien entendu que (L_t) lui même majore (X_{t-}). Posons, à la manière du début de cet exposé

(9) $$A_t = \int_0^t \frac{dB_s}{\dot{L}_s - \dot{X}_s} \quad \text{processus croissant prévisible}$$

de sorte que $\Delta A_t = (X_{t-} - \dot{X}_t)/(\dot{L}_t - \dot{X}_t) \leqq 1$ sur tout graphe prévisible. Puis

(10) $$M_t = \exp(-A_t^c) \prod_{s \leqq t} (1 - \Delta A_s) \quad \text{processus décroissant prévisible}$$

et enfin

(11) $$D_t = \frac{1}{M_t}\int_t^{\infty} -L_s dM_s$$

processus non adapté, qui (M étant prévisible) a même projection bien-mesurable que

(12) $$D'_t = \frac{1}{M_t}\int_t^{\infty} -\dot{L}_s dM_s \ .$$

Un calcul formel en tout point semblable à celui du paragraphe 1 montre que la projection bien-mesurable de (D'_t) - et donc de (D_t)- est (X_t), sous réserve que (9) soit fini et que ses sauts soient <1. D'autre part , nous avons en intégrant par parties

$$D_t = \frac{1}{M_t}[M_t L_t - M_\infty L_\infty + \int_t^{\infty} M_{s-} dL_s]$$

Si $L_t = L$, une v.a. constante, ce processus est décroissant, et majoré par L.

Nous appliquons alors, comme dans la première partie, ces résultats à la v.a. $L=X^*$, et au processus λX , $0<\lambda<1$. Le processus $(\dot{L}_s)$ majore le processus $X^*_{s-} = \sup_{u<s} X_u$. Le processus $(Y_t)=(X^*_t-\lambda X_t)$ a des trajectoires c.à d.l.à g. : pour tout intervalle $[0,t]$, il existe donc un point u tel que $Y_u(\omega)$ ou $Y_{u-}(\omega)$ soit égal à la borne inférieure b de $Y_\cdot(\omega)$ sur $[0,t]$. Cette borne inférieure n'est donc nulle que si $X^*_u(\omega)$ ou $X^*_{u-}(\omega)=0$, ce qui ne peut avoir lieu que si $X_0(\omega)=0$, donc $B_\infty(\omega)=0$ (car $X_0=E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_0]$). De sorte que le processus (A_t) est bien un vrai processus croissant, à sauts <1, et que le calcul peut se justifier rigoureusement. On fait ensuite tendre λ vers 1.

LIEN AVEC LES DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES

Revenons au problème initial. Au lieu de porter notre attention sur la surmartingale positive (X_t) bornée par 1, portons la sur la <u>sous</u>martingale positive $1-X_t=Y_t$, projection bien-mesurable du processus croissant $H_t=1-D_t$, continu à droite. Le processus croissant prévisible (B_t) est caractérisé par le fait que $B_0=0$, et que Y_t-B_t est une martingale, mais ici nous n'avons plus de convention agréable relative à $+\infty$, et nous conviendrons que $B_\infty=B_{\infty-}$. Le dernier facteur du produit (1) s'écrit $1-X_{\infty-} = Y_{\infty-}$ (que nous écrirons simplement Y_∞). Dans ces conditions, nous avons

(13) $$H_t = \exp\left(-\int_t^{\infty}\frac{dB^c_s}{\hat{Y}_s}\right)\prod_{t<s<\infty}\left(1-\frac{\Delta B_s}{\hat{Y}_s}\right).Y_\infty$$

Sous cette forme, le fait que (Y_t) soit majorée par 1 n'apparaît plus du tout. Noter qu'en un temps prévisible T $1-\frac{\Delta B_T}{\hat{Y}_T} = \frac{Y_{T-}}{\hat{Y}_T} =$

$(1+\frac{\Delta B_T}{Y_{T-}})^{-1}$, de sorte que l'on a aussi

$$H_t = \exp(-\int_t^{\infty} \frac{dB^c_s}{Y_{s-}}) \prod_{t<s} (1+\frac{\Delta B_s}{Y_{s-}})^{-1} . Y_{\infty}$$

Introduisons le processus décroissant (prévisible)

$$(14) \qquad \overline{K}_t = \exp(-\int_0^t \frac{dB^c_s}{Y_{s-}}) \prod_{s\leq t} (1+\frac{\Delta B_s}{Y_{s-}})^{-1}$$

Un raisonnement fait plus haut (remplacement de Y_t par $Y_t+\varepsilon$, puis $\varepsilon \downarrow 0$) montre que (H_t) est toujours continu à droite : la limite d'une suite décroissante de processus croissants continus à droite est continue à droite. D'autre part, le produit $H_t\overline{K}_t$ ne dépend pas de t, il garde une valeur constante U : si l'on pose $K_t=\overline{K}_{t+}$, on a encore $H_tK_t=U$, et $U\leqq Y_{\infty}$: si (Y_t) est uniformément intégrable, on a alors

$$+\infty > E[U|\underline{\underline{F}}_t] = E[H_tK_t|\underline{\underline{F}}_t] = K_tE[H_t|\underline{\underline{F}}_t] = K_tY_t$$

d'où, formellement, la décomposition multiplicative $Y_t=K_t^{-1}E[U|\underline{\underline{F}}_t]$ de la sousmartingale (Y_t) en un produit d'une martingale et d'un processus croissant (décomposition formelle, car on ignore si K_t peut s'annuler, et ce qui arrive alors : cela mérite certainement d'être étudié). Cette décomposition des <u>sous</u>-martingales positives a la même forme que celle qui figure dans [2] pour les <u>sur</u>martingales positives.

LIEN AVEC LES FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES

Revenons au cas où (X_t) est une surmartingale positive majorée par 1, mais prenons la d'une forme spéciale : soit ξ_t un processus de Markov droit à valeurs dans un espace d'états E, et soit f une fonction excessive (potentiel de la classe (D)) majorée par 1. Nous prendrons $X_t=f\circ\xi_t$, et (B_t) sera une fonctionnelle additive prévisible. La projection $\dot{X}_t$ pourra s'expliciter de la manière suivante : on désigne par $\overline{E}$ un compactifié de RAY de E, par (P_t) le semi-groupe de RAY correspondant, par ξ_{t-} les limites à gauche prises dans $\overline{E}$. Alors pour $t>0$ on a $\dot{X}_t = P_0f\circ\xi_{t-}$. Dans ces conditions, lorsque f est majorée par $1-\varepsilon$, le processus (M_t) de la formule (3) est une fonctionnelle multiplicative , et la représentation de (X_t) que nous avons obtenue est de la forme $f=P_R1$, où R est le temps terminal associé à (M_t) ; quant au processus décroissant non adapté (D_t), il est continu à droite et <u>homogène</u> , i.e. coprévisible au sens d' AZEMA . Lorsque f est seulement majorée par 1, la représentation $f=P_R1$ et le caractère coprévisible de (D_t) restent valables (cf.[1], dont les restrictions bizarres ont été levées dans les pages précédentes).

BIBLIOGRAPHIE

[1]. P.A.Meyer. Quelques résultats sur les processus de Markov. Invent. Math. 1, 1966, p.101-115.

[2]. -- . On the multiplicative decomposition of positive supermartingales. Markov processes and potential theory, edited by J.Chover. Wiley New York 1967, p. 103-116.