

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BRETAGNOLLE

Une remarque sur le problème de Skorohod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 11-19

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__11_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LE PROBLEME DE SKOROKHOD

exposé de J. Bretagnolle

I. LE PROBLEME DE SKOROKHOD.

Etant donnée une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\int x d\mu = 0$ et que $\text{Var}(\mu) = \int x^2 d\mu < +\infty$, résoudre le problème de Skorokhod, c'est trouver un temps d'arrêt T du mouvement brownien (B_t) issu de 0 tel que la répartition de B_T soit μ , et ceci de manière "minimale", i.e. on exige que $E(T) = \text{Var}(\mu)$.

Il y a plusieurs constructions de tels temps d'arrêt. Celle de Dubins a été exposée à ce séminaire par P.A. Meyer (Séminaire de Strasbourg, vol.5, p.170-176, Lecture Notes n°191). Je renverrai à cet exposé par le signe (*).

J'avais émis la conjecture suivante : le temps de Dubins est le meilleur au point de vue des moments exponentiels, au sens suivant : soit S un temps d'arrêt du mouvement brownien, soient μ la loi de B_S , et T le temps d'arrêt de Dubins associé à la mesure μ (ainsi B_S et B_T ont tous deux la même loi μ). Alors si S possède un moment exponentiel, i.e. s'il existe $a > 0$ tel que $E[e^{aS}] < +\infty$, alors il existe aussi un $b > 0$ tel que $E[e^{bT}] < +\infty$.

Une discussion avec le Professeur Dinges m'a fortement fait douter de la validité de cette conjecture. Effectivement, j'ai ensuite trouvé un contre-exemple que je donne au dernier paragraphe.

II. LA CONSTRUCTION DE DUBINS

Dans ce paragraphe, je rappelle les résultats de (*) dont j'aurai besoin.

A). Un cas simple. Donnons nous deux nombres u, v , $u \leq 0 \leq v$, et supposons que le support de la loi μ soit $\{u, v\}$. Alors $\mu = p\epsilon_u + q\epsilon_v$, avec $p+q=1$, $pu+qv=0$, ce qui détermine p et q . Soit alors S_{uv} le temps de sortie de l'intervalle $]u, v[$ pour le mouvement brownien : S_{uv} est fini p.s., toutes ses puissances sont intégrables, donc $E[B_{S_{uv}}] = 0$. Si l'on pose $p' = P\{B_{S_{uv}} = u\}$, $q' = P\{B_{S_{uv}} = v\}$, cela entraîne $p' + q' = 1$ et $p'u + q'v = 0$ (continuité des trajectoires), donc $p' = p$ et $q' = q$. On vérifie immédiatement que $E[S_{uv}] = \text{Var}(\mu)$. Autrement dit, S_{uv} résout le problème de Skorokhod dans ce cas simple.

On peut calculer explicitement la transformée de Laplace $E[e^{tS_{uv}}]$, et vérifier qu'elle est finie si et seulement si $t(|u|+|v|)^2 < \pi^2/2$.

B). Le temps de Skorokhod. Pour ne pas alourdir l'exposé, construisons le seulement dans le cas simple où la loi μ est symétrique. Soient Ω' un espace sur lequel on a construit un brownien, Ω'' sur lequel est donnée une v.a. X de loi μ . Soit $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ muni de la mesure produit et de la famille de tribus $\underline{F}_t = \underline{T}(X, B_s, s \leq t)$. Posons $S(\omega', \omega'') = S_{-|X(\omega'')|, |X(\omega'')|}(\omega')$. S est un temps d'arrêt de $(\underline{F}_t)$, et l'on a

- $|B_S| = |X|$ p.s. (continuité des trajectoires). Comme la loi de B_S est symétrique, elle est donc égale à μ .
- $E[S] = \int_{\Omega''} E_{\Omega'}[S_{-|X(\omega'')|, |X(\omega'')|}] = \int_{\Omega''} X^2(\omega'') = \text{Var}(\mu)$.

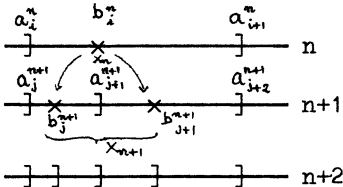
Mais

- 1°) S n'est pas un temps d'arrêt de la famille naturelle du brownien ;
- 2°) Le calcul de $E[e^{tS}]$ montre que si μ n'est pas à support compact, $E[e^{tS}] = +\infty$ pour tout $t > 0$ d'après A).

C). Le temps de Dubins. On va tout d'abord travailler sur $(\mathbb{R}, \underline{B}, \mu)$ en appelant X la v.a. $x \mapsto x$. Construisons par récurrence une famille croissante de tribus finies $\underline{H}_n$, dont les atomes seront des intervalles $[a_i^n, a_{i+1}^n] : \underline{H}_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\underline{H}_1$ a pour atomes $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty]$; $\underline{H}_{n+1}$ s'obtient en découpant chaque atome $[a_i^n, a_{i+1}^n]$ en deux atomes $[a_i^n, b_i^n], [b_i^n, a_{i+1}^n]$, où b_i^n est défini par

$$b_i^n = \frac{1}{\mu([a_i^n, a_{i+1}^n])} \int_{[a_i^n, a_{i+1}^n]} x d\mu$$

après quoi on renumérote les atomes. Si maintenant $X_n = E[X | \underline{H}_n]$, les X_n forment une martingale uniformément intégrable et on montre (voir (*)) que X_n tend vers X dans L^1 , donc en loi, ou encore que les mesures $\mu_n = \sum \mu([a_i^n, a_{i+1}^n]) \cdot \varepsilon_{b_i^n}$ convergent vers μ .



Posons $x_{n+1} = X_{n+1} - X_n$ ($x_0 = 0$). Sur l'atome $[a_i^n, a_{i+1}^n]$ de $\underline{H}_n$, x_{n+1} ne prend que deux valeurs, l'une négative

$$u_i^n = b_j^{n+1} - b_i^n \quad (\text{voir figure})$$

l'autre positive $v_i^n = b_{j+1}^{n+1} - b_i^n$. Nous

noterons u_n, v_n les fonctions $\underline{H}_n$ -mesurables

valant respectivement u_i^n, v_i^n sur chaque atome $[a_i^n, a_{i+1}^n]$ de $\underline{H}_n$.

Nous notons aussi K_n le support de μ_n (l'ensemble des b_i^n).

Soit maintenant un brownien (B_t) muni de ses tribus naturelles $\mathbb{F}_t$. Posons $R_0=0$, $R_{n+1}=\inf\{t|t>R_n, B_t \in K_{n+1}\}$. Les R_n sont évidemment des temps d'arrêt, montrons que B_{R_n} a pour répartition μ_n : les considérations précédentes montrent que si l'on pose $r_{n+1}=R_{n+1}-R_n$ on a

$$r_{n+1} = S_{B_{R_n}+u_n(B_{R_n}), B_{R_n}+v_n(B_{R_n})} \circ \theta_{R_n}$$

Le fait que $E[x_{n+1} | \mathbb{H}_n] = 0$ et les propriétés des temps de sortie $S_{u,v}$ montrent que, conditionnellement à $B_{R_n} = b_i^n$, $B_{R_{n+1}} - B_{R_n}$ a même loi que x_{n+1} conditionnellement à $x_n = b_i^n$, et cela suffit.

On voit facilement (cf. (*)) que $\sup_n R_n < +\infty$, et donc que si l'on pose $T_D = \lim_n R_n$, la loi de B_{T_D} est μ . De $E[R_n] = E[X_n^2] \leq E[X^2] < +\infty$ on tire enfin $E[T_D] = \text{Var}(\mu)$.

Dans la suite on gardera la notation x_{n+1} pour $B_{R_{n+1}} - B_{R_n}$ et $\mathbb{H}_n$ pour la tribu engendrée par B_{R_n} (ce qui revient à transporter les considérations précédentes sur l'espace du mouvement brownien).

III. MOMENTS EXPONENTIELS

Rappelons les inégalités de Burkholder.

Soit $X=(X_n, \mathbb{H}_n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une martingale de carré intégrable telle que

$X_0=0$. On pose $x_{n+1}=X_{n+1}-X_n$ et $Q(X) = (\sum_n x_n^2)^{1/2}$. Alors

(1) Il existe $C < \infty$ telle que $\|Q(X)\|_p \leq C(1 - \frac{1}{p})^{-1} p^{1/2} \|x_\infty\|_p$, $1 < p < \infty$

Prenant $p=2m$ et utilisant l'inégalité $k^k \leq A^k k!$ ($A < \infty$) on obtient

(2) Il existe $K < \infty$ telle que $E[Q(X)^{2m}] \leq K^m m! E[X_\infty^{2m}]$

Sa version brownienne sera

(3) Si T est un temps d'arrêt, $E[T^m] \leq K^m m! E[B_T^{2m}]$.

Remarque. (3) peut servir à montrer que S_{uv} a un moment exponentiel sans calcul explicite.

Les notations sont à nouveau celles de II : le lemme suivant signifie que, du point de vue des moments exponentiels, la variation quadratique du brownien stoppé à R_n (c'est à dire R_n) est comparable à celle de la martingale discrète $B_{R_1}, B_{R_2}, \dots, B_{R_n}$.

LEMME 1. Il existe $s_1 > 0$ tel que la relation $s. \sup_{k \leq n} \|x_k\|_\infty \leq s_1$ entraîne
ne $E[e^{sR_n}] \leq E[\exp(80Ks \sum_{k \leq n} x_k^2)]$.

DEMONSTRATION. On a $\exp(sR_n) = \prod_{k \leq n} \exp(sr_k) =$

$$\frac{\prod_{k \leq n} \exp(sr_k)}{\prod_{k \leq n} E[\exp(Fsx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}]} \cdot \frac{\prod_{k \leq n} E[\exp(Fsx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}]}{\exp(Gs \sum_{k \leq n} x_k^2)} \cdot \exp(Gs \sum_{k \leq n} x_k^2) = A_n B_n C_n$$

où les constantes F, G seront choisies plus loin. Donc

$$E[e^{sR_n}] \leq (E[A_n^2])^{1/2} (E[B_n^4])^{1/4} (E[C_n^4])^{1/4}$$

On va montrer que pour un bon choix de F et G , (A_n^2) et (B_n^4) sont des surmartingales positives (avec $A_0 = B_0 = 1$) pour $0 \leq i \leq n$. Comme $C_n \geq 1$, nous aurons $E[C_n^4]^{1/4} \leq E[C_n^4]$ ce qui nous donnera

$$E[e^{sR_n}] \leq E[\exp(4Gs \sum_{k \leq n} x_k^2)]$$

Choisissons d ($0 < d < 1$) tel que $0 \leq x \leq d$ implique simultanément $1/(1-x) \leq e^{2x}$, $e^x \leq 1+2x$, $(1+2x)^4 \leq 1+10x$, et $e^{-2x} \leq 1-x$.

a) Pour que (A_n^2) soit une surmartingale, il suffit que

$$E[\exp(2sr_k) | \mathcal{H}_{k-1}] \leq E[\exp(Fsx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}]^2.$$

Comme $E[Z | \mathcal{H}] \leq E[Z | \mathcal{H}]^2$ pour $Z \geq 1$, il suffit que le côté gauche soit majoré par $E[\exp(Fsx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}]$. Or d'après (3), sommant sur m la majoration de $E[T^m/m!]$, on a si $2sK \|x_k\|_\infty^2 < 1$

$$\begin{aligned} E[\exp(2sr_k) | \mathcal{H}_{k-1}] &= E\left[\sum_m \frac{(2sr_k)^m}{m!} | \mathcal{H}_{k-1}\right] \\ &\leq E\left[\sum_m K^m (2sx_k)^{2m} | \mathcal{H}_{k-1}\right] = E[1/(1-2sKx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}] \\ &\leq E[\exp(4Ksx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}] \end{aligned}$$

Le processus (A_i) est donc une surmartingale pour $0 \leq i \leq n$ si $F=4K$, et si $2sK \cdot \sup_{k \leq n} \|x_k\|_\infty^2 < d$.

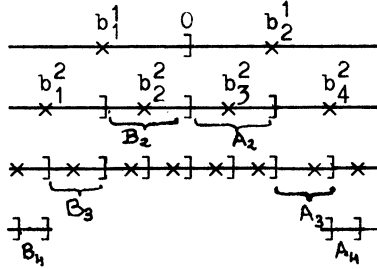
b) De même, pour que (B_i^4) soit une surmartingale pour $0 \leq i \leq n$ il suffit d'avoir $E[\exp(Fsx_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}]^4 \cdot E[\exp(-4Gs x_k^2) | \mathcal{H}_{k-1}] \leq 1$. Or si l'on a $Fs \cdot \sup_{k \leq n} \|x_k\|_\infty^2 \leq d$ et $4Gs \cdot \sup_{k \leq n} \|x_k\|_\infty^2 \leq d$, le côté gauche peut se majorer par $(1+10FsE[x_k^2 | \mathcal{H}_{k-1}]) (1-2GsE[x_k^2 | \mathcal{H}_{k-1}])$, qui est ≤ 1 si $2G=10F$. Comme $F=4K$, on prend $G=20K$, et le nombre s_1 de l'énoncé vaut $d/80K$.

PROPOSITION 1. Posons $\|X\| = \sup_n \|x_n\|_\infty$ ($\|X\|$ ne dépend que de μ).

Alors

- il existe s_2 tel que $E[e^{s^T D}] < +\infty$ si $s\|X\|^2 < s_2$,
- si $\|X\| = +\infty$, on a $E[e^{s^T D}] = +\infty$ pour tout $s > 0$.

DEMONSTRATION. Pour la première partie il suffit, compte tenu du lemme 1, de montrer que si $\|X\| < +\infty$ on a $E[\exp(s \sum_{k=1}^n x_k^2)] < +\infty$ pour s assez petit.



Soit A_n l'événement $\{x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{n-1} > 0, x_n \leq 0\}$, de même $B_n = \{x_1 < 0, \dots, x_{n-1} < 0, x_n \geq 0\}$. Si l'on réalise sur $\mathbb{R}$ la martingale (X_n) (voir la figure ci-contre) on s'aperçoit que A_n et B_n sont des atomes de $\mathbb{H}_n$, et que l'espace entier est réunion des A_n et des B_n à un ensemble négligeable près.

Je dis que

$$(4) \quad \int_{A_n} \exp(s \sum_{k=1}^n x_k^2) d\mu \leq \frac{e^{2s\|X\|^2}}{1 - Ks\|X\|^2} \int_{A_n} \exp(s\|X\|.X) d\mu \quad \text{si } sK\|X\|^2 < 1.$$

En effet, le côté gauche est égal à

$$\int_{A_n} \exp(s \sum_{k=1}^n x_k^2) E[\exp(s \sum_{k=n}^\infty x_k^2) | \mathbb{H}_n] d\mu$$

Or sur A_n , $\sum_{k=1}^n x_k^2$ est la variation quadratique $Q^2(Y)$ de la martingale $(Y_k) = (X_{n+k} - X_n)$. Mais tous les atomes ultérieurs auxquels donne naissance A_n sont contenus dans A_n , donc sur A_n on a $X_{n-2} \leq X_{n+k} \leq X_{n-1}$, et $X_{n-1} - X_{n-2} \leq \|X\|$, de sorte que Y est majorée par $\|X\|$ en valeur absolue.

L'inégalité de Burkholder (2) donne alors par sommation

$$E[\exp(s \sum_{k=n}^\infty x_k^2) | \mathbb{H}_n] \leq \frac{1}{1 - Ks\|X\|^2} \quad \text{sur } A_n, \text{ si } Ks\|X\|^2 < 1$$

Par ailleurs, on a sur A_n , tous les $x_k, k < n$ étant positifs

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k^2 &\leq x_n^2 + \sup_{k < n} x_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k \leq x_n^2 + \|X\|X + \|X\| |X_{n-1} - X| \\ &\leq 2\|X\|^2 + \|X\|.X \end{aligned}$$

D'où (4). On a une inégalité similaire sur B_n , et par sommation

$$(5) \quad E[\exp(s \sum_{k=1}^n x_k^2)] \leq \frac{e^{2s\|X\|^2}}{1 - Ks\|X\|^2} E[e^{s\|X\|.X}] \quad \text{si } sK\|X\|^2 < 1.$$

La première partie sera donc établie si nous montrons que la condition

$\|X\| < \infty$ entraîne

(6) il existe $s_3 > 0$ tel que $E[e^{t|X|}] < +\infty$ dès que $t\|X\| \leq s_3$

Cela résultera de la proposition 2 ci-dessous.

Passons à la seconde partie. Pour tout n , la v.a. x_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs : elle est donc bornée. Si $\|X\| = +\infty$, la borne supérieure de $|x_n|$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes pour n grand. M étant arbitrairement choisi, on peut trouver un n , un atome C_n (de probabilité > 0) de H_n , tel que l'une des deux valeurs de $|x_n|$ sur C_n dépasse M : supposons par exemple que la valeur positive v dépasse M , l'autre valeur u étant < 0 . Un retour à II.A) montre alors que

si $sM^2 \geq \pi^2/2$, on a $E[e^{s x_{n+1}} | H_n] = +\infty$ sur C_n

et a fortiori $E[e^{s T_D}] \geq \int_{C_n} e^{s T_D} = +\infty$. Comme M est arbitraire, T_D n'admet pas de moment exponentiel.

PROPOSITION 2. Associons à μ les fonctions $H^+(x) = \mu([x, \infty[)$ et $H^-(x) = \mu(]-\infty, -x])$ ($x > 0$). Alors $\|X\|$ est fini si et seulement s'il existe un nombre $M < +\infty$ tel que

pour tout $x > 0$, $H^+(x+M) \leq \frac{1}{3} H^+(x)$, $H^-(x+M) \leq \frac{1}{3} H^-(x)$.

DEMONSTRATION. Posons $s_0^+ = 0$,

$$s_1^+ = \frac{1}{\mu(]0, \infty[)} \int_{]0, \infty[} x d\mu, \quad s_{n+1}^+ = \frac{1}{\mu[s_n^+, \infty[)} \int_{[s_n^+, \infty[} x d\mu$$

(s_n^+ est l'extrémité gauche de l'atome de H_{n+1} situé le plus à droite).

Posons $s^+ = \sup_n (s_{n+1}^+ - s_n^+)$, et définissons de même les s_n^- , s^- . Alors $\|X\| = \sup(s^+, s^-)$.

a). Si la condition de la proposition est satisfaite, on a $\int_{x>a} x d\mu =$

$$aH^+(a) + \int_{x>a} H^+(x) dx \leq aH^+(a) + \frac{3}{2} \int_a^{a+M} H^+(x) dx \leq (a + \frac{3}{2}M) H^+(a). \quad x>a \quad D'où$$

$$\frac{1}{\mu(]a, \infty[)} \int_{x>a} x d\mu - a \leq \frac{3}{2} M, \quad s^+ \leq \frac{3}{2} M \quad \text{et} \quad \|X\| \leq \frac{3}{2} M.$$

b). Réciproquement, supposons que la condition ne soit pas vérifiée,

par exemple du côté positif. M étant choisi, on peut trouver a

avec $H^+(a+M) > \frac{1}{3} H^+(a)$. Soit alors s_n^+ le premier des s_i^+ qui dépasse a

(son existence provient de la convergence de μ_n vers μ , qui charge $]a+M, \infty[$). Alors

- ou bien $s_n^+ \geq a+M/2$, et alors $s_n^+ - s_{n-1}^+ \geq M/2$,

- ou bien $s_n^+ < a+M/2$, et alors $\int_{[s_n^+, \infty[} x d\mu \geq s_n^+ H^+(s_n^+) + \int_{s_n^+}^{a+M} H^+(x) d\mu$

$$\geq s_n^+ H^+(s_n^+) + \frac{M}{2} H^+(a+M) > s_n^+ H^+(s_n^+) + \frac{M}{6} H^+(s_n^+), \quad d'où \quad s_{n+1}^+ - s_n^+ \geq M/6.$$

Dans les deux cas, on voit que $\|X\| \geq M/6$, donc (M étant arbitraire) $\|X\| = +\infty$.

L'ensemble des deux raisonnements montre aussi que si $\|X\| < \infty$, et si M est le plus petit nombre satisfaisant à la condition, on a $M/6 \leq \|X\| \leq M/2$. Les conditions de la forme $s\|X\|^2 \leq A$ peuvent donc être remplacées par des conditions de la forme $sM^2 \leq A$.

DEMONSTRATION DE (6). On a $E[e^{sX^+}] = -\int_0^\infty e^{sx} dH^+(x) = 1 + \sum_{k=1}^M \int_0^{(k+1)M} s e^{sx} H^+(x) dx$
 $\leq 1 + e^{sM} \sum_{k=1}^M 3^{-k} e^{skM}$, de même pour X^- . On a vu que M et $\|X\|$ sont du même ordre.
 Résumons :

THEOREME. Soit T_D le temps de Dubins associé à la loi centrée μ . Pour que T_D admette des moments exponentiels il faut et il suffit que μ satisfasse la condition de la proposition 2. On a alors $E[e^{sT_D}] < +\infty$ dès que $sM^2 < s_0$, où s_0 est un nombre > 0 indépendant de μ .

Une condition suffisante :

COROLLAIRE. Soit S un temps d'arrêt borné, et soit μ la loi de B_S . Alors le temps de Dubins associé à μ admet des moments exponentiels.

DEMONSTRATION. Supposons par exemple $S \leq 1$. Notons $B_{s,t}^*$ la quantité $\sup_{s \leq u \leq t} |B_u - B_s|$ et τ_a le temps d'atteinte de a : $\tau_a = \inf\{t > 0 ; B_t = a\}$.
 On a $\{\tau_{a+1} < S\} \cap \{B_{\tau_{a+1}, \tau_{a+1}+1}^* < 1\} \subset \{B_S > a\}$ (remarquer que la condition $S \leq 1$ entraîne que $S < \tau_{a+1} + 1$ quel que soit a). On en déduit

$$P\{\tau_{a+1} < S\} \cdot P\{B_{0,1}^* < 1\} \leq P\{B_S > a\}$$

car $B_{\tau_{a+1}, \tau_{a+1}+1}^*$ et $B_{0,1}^*$ ont même loi. On a également $\{B_S > a+1\} \subset \{\tau_{a+1} < S\}$. Il vient donc

$$\begin{aligned} \int_{\{B_S > a\}} B_S &\leq (a+1)P\{B_S > a\} + \int_{\{B_S > a+1\}} (B_S - a - 1) \\ &\leq (a+1)P\{B_S > a\} + P\{\tau_{a+1} < S\} E[B_{0,1}^*] \end{aligned}$$

puisque $|B_S - a - 1| = |B_S - B_{\tau_{a+1}}|$ sur $\{\tau_{a+1} < S\}$, et que cette v.a. est majorée par $B_{\tau_{a+1}, \tau_{a+1}+1}^*$ de même loi que $B_{0,1}^*$.

Les deux remarques combinées donnent

$$\frac{1}{P\{B_S > a\}} \int_{\{B_S > a\}} B_S \leq a+1 + E[B_{0,1}^*] / P\{B_{0,1}^* < 1\}$$

et par conséquent, avec les notations utilisées plus haut

$$\|X\| \leq 1 + E[B_{0,1}^*] / P\{B_{0,1}^* < 1\}.$$

IV. CONSTRUCTION D'UN TEMPS D'ARRÊT

On construit un temps d'arrêt T du mouvement brownien (B_t) tel que $E[e^{sT}] < \infty$ pour tout s , et tel que si μ est la loi de B_T , T_D le temps de Dubins associé à μ , $E[e^{sT_D}] = \infty$ pour tout $s > 0$.

Soit $S_{A,a} = \inf\{t \mid t > 0, B_t = A+a \text{ ou } B_t = A-a\}$, et $S_{A,a,M} = S_{A,a} \wedge M$.

Remarquons que

(7) Pour tout s , $E[\exp(sS_{A,a,M})]$ est fini (puisque'il s'agit d'un temps borné).

(8) $\lim_M P_A\{B_{S_{A,a,M}} = A+a\} = \frac{1}{2} = P_A\{B_{S_{A,a,M}} > A\}$ (P_x, E_x représentent probabilité et espérance avec loi initiale ε_x).

Choisissons une suite a_n de nombres ≥ 0 telle que si $A_n = \sum_{k \leq n} a_k$ on ait

$$(9) \quad A_n > \frac{3}{2}A_{n-1} \quad (\text{donc } a_n \text{ tend vers } +\infty)$$

Puis d'après (8) une suite M_n telle que M_n tende vers l'infini et

$$(10) \quad \lim_n P_{A_n}\{B_{S_{A_n,a_n,M_n}} = A_n + a_n\} = 1/2$$

Puis une suite s_n tendant vers l'infini, et une suite b_n de nombres > 0 , telle que $b_n < 1$, $\lim_n b_n = 0$ et que

$$\sum_n \left(\prod_{k < n} b_k \right) \left(\prod_{k \leq n} E_{A_n} [\exp(s_n S_{A_n,a_n,M_n})] \right) < \infty$$

Les transformées de Laplace en question étant des fonctions finies et croissantes de s , cela garantit que

$$(11) \quad \text{pour tout } s > 0, \quad \sum_n \left(\prod_{k < n} b_k \right) \left(\prod_{k \leq n} E_{A_n} [\exp(s S_{A_n,a_n,M_n})] \right) < \infty$$

Adjoignons maintenant à notre brownien une suite de v.a. Z_n , indépendantes entre elles et indépendantes de (B_t) , de répartition $P\{Z_n=1\} = b_n = 1 - P\{Z_n=0\}$. Définissons la suite des temps d'arrêt T_n par $T_0=0$ et

$$T_n = T_{n-1} + S_{B_{T_{n-1}}, a_n, M_n} \circ \theta_{T_{n-1}}$$

C_n sera l'événement $\{B_{T_n} - B_{T_{n-1}} = a_n\}$, $D_n = \{Z_n=1\}$, $\Gamma_n = \bigcap_{k \leq n} C_k$,

$\Delta_n = \bigcap_{k \leq n} D_k$. $\Delta_n \downarrow \emptyset$ puisque b_n tend vers 0. Définissons alors T par

$$T = \sum_n 1_{\Gamma_{n-1} \cap \Delta_{n-1} \setminus \Gamma_n \cap \Delta_n} \cdot T_n$$

Soit $F_t = \mathbb{T}(B_s, s \leq t, Z_n, n \in \mathbb{N})$. Comme $\Gamma_n \cap \Delta_n \subset F_{T_n}$, T est un temps d'arrêt de la famille (F_t) .

LEMME 2. $E[e^{sT}] < +\infty$ pour tout s , et la loi μ de B_T ne satisfait pas à la condition de la proposition 2.

DEMONSTRATION. $E[e^{sT}] \leq \sum_n E[1_{\Delta_{n-1}} e^{sT_n}] \leq \sum_n (\prod_{k \leq n} b_k) (\prod_{k \leq n} E[\exp s_{0, a_n, M_n}])$

Comme S_{0, a_n, M_n} a même loi pour P_0 que S_{A_n, a_n, M_n} pour P_{A_n} , cette quantité est finie d'après (11).

Etudions maintenant B_T . On a $\{T \geq T_n\} = \Gamma_{n-1} \cap \Delta_{n-1}$, donc $\{T \geq T_n, Z_n = 0\} \subset \{T = T_n\}$. Par ailleurs

$$\{T \geq T_n\} \cap C_n \cap \{Z_n = 0\} \subset C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n \cap \{T = T_n\} \subset \{B_{T_1} = A_1, \dots, B_{T_n} = A_n, T = T_n\} \\ \subset \{B_T = A_n\}$$

soit

$$(12) \quad P\{B_T = A_n\} \geq P\{T \geq T_n\} P(C_n) P\{Z_n = 0\}$$

car $\{T \geq T_n\} = \Gamma_{n-1} \cap \Delta_{n-1}$ ne dépend que de $(B_s, s \leq T_{n-1}, Z_k, k \leq n-1)$, et est donc indépendant de C_n et de Z_n . Ensuite, on a $\{T \leq T_{n-1}\} \subset \{B_T \leq A_{n-1}\}$ et donc

$$(13) \quad \{B_T > A_{n-1}\} \subset \{T \geq T_n\}$$

soit, puisque $A_n > 3/2 A_{n-1}$ d'après (9)

$$\frac{P\{B_T > 3/2 A_{n-1}\}}{P\{B_T > A_{n-1}\}} \geq \frac{P\{B_T = A_n\}}{P\{B_T > A_{n-1}\}} \geq \frac{P\{T \geq T_n\} P(C_n) P\{Z_n = 0\}}{P\{T \geq T_n\}}$$

qui tend vers $1/2$, car $b_n \rightarrow 0$, et $P(C_n) \rightarrow 1/2$ d'après (10).

Maintenant, comme A_n tend vers $+\infty$, nous avons pour tout M fixé

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{P\{B_T > a+M\}}{P\{B_T > a\}} \geq \lim_n \frac{P\{B_T > 3/2 A_{n-1}\}}{P\{B_T > A_{n-1}\}} = 1/2$$

et la condition de la proposition 2 n'est pas satisfaite.

REMARQUE FINALE. Bien que le temps de Dubins T_D associé à μ ne satisfasse pas la conjecture du début, on gagne par rapport au temps de Skorokhod T_S . Pour que T_S ait des moments exponentiels il est nécessaire, on l'a vu, que le support de μ soit compact, alors que pour T_D il suffit que μ soit la loi de B_S pour un temps d'arrêt borné S (ce qui inclut la loi de B_1 , dont le support est $\mathbb{R}$). Cette condition n'est d'ailleurs pas nécessaire : par exemple, la loi symétrique μ telle que $\mu\{|x| > a\} = e^{-a}$ satisfait à la condition de la proposition 2, donc T_D admet des moments exponentiels. Mais $\int e^{sx^2} d\mu(x) = +\infty$, donc μ ne peut être représentée au moyen d'un temps d'arrêt borné.