Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Claude Dellacherie

Potentiels de fonctionnelles additives. Un contre-exemple de Knight

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 58-60
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__58_0>

Séminaire de Probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg Année 1971/72

POTENTIELS DE FONCTIONNELLES ADDITIVES
UN CONTRE-EXEMPLE DE KNIGHT (exposé de C. Dellacherie)

Dans "Potentiels de Green et fonctionnelles additives" (cf vol. IV du séminaire), nous avions été amenés à poser le problème suivant : soit (A_t) une fonctionnelle additive naturelle, dont le potentiel est fini presque-partout; le potentiel est-il alors fini partout ?
Nous présentons ici un contre-exemple que nous a communiqué Knight, simplifié en suivant une suggestion de Bretagnolle.

L'espace d'états E sera la somme topologique dénombrable $\sum_{n\geq 0}\mathbb{R}_+^{(n)}$ où $\mathbb{R}_+^{(n)}$ est une copie de $\mathbb{R}_+$; pour $u\in\mathbb{R}_+$, nous désignerons par $u^{(n)}$ le point correspondant de $\mathbb{R}_+^{(n)}$ (mais aussi par u s'il n'y pas d'ambiguité). Nous allons décrire d'abord informellement le processus, en fait la réalisation d'un semi-groupe. Si on part d'un point de $\mathbb{R}_+^{(n)}$ avec $n>0$, on continue à se déplacer sur $\mathbb{R}_+^{(n)}$ suivant la translation uniforme de vitesse $1/n$. Si on part d'un point de $\mathbb{R}_+^{(0)}$, on se déplace sur $\mathbb{R}_+^{(0)}$ suivant la translation uniforme de vitesse 1, mais on se permet aussi un saut dans $\mathbb{R}_+^{(n)}$, $n>0$, selon les modalités suivantes. On désigne par I_n l'intervalle $[1/n,1/(n-1)[$ de $\mathbb{R}_+^{(0)}$ pour $n>0$, et on se donne une v.a. exponentielle T, de paramètre 1 : T va définir le moment du saut, et les I_n, l'endroit où l'on saute. Plus précisément, si T arrive au moment où la trajectoire issue d'un point de $\mathbb{R}_+^{(0)}$ se trouve dans I_n, alors on saute à l'origine de $\mathbb{R}_+^{(n)}$.

La construction d'un tel processus n'est pas bien difficile. Pour n fixé, désignons par $\Omega^{(n)}$ l'ensemble des applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^{(n)}$ de la forme $X_t(\omega) = \omega(t) = x^{(n)} + \frac{t}{n}$ pour $n > 0$, et de la forme $X_t(\omega) = \omega(t) = x^{(0)} + t$ pour $n = 0$. On sait très bien réaliser la translation uniforme de vitesse $1/n$ pour $n > 0$ (resp 1 pour $n = 0$) sur $\mathbb{R}_+^{(n)}$ en prenant $\Omega = \sum_{n \geqq 0} \Omega^{(n)}$ comme ensemble de trajectoires.

Donnons nous maintenant la v.a. exponentielle T définie sur un espace W; posons $\bar{\Omega} = \Omega \times W$, $\bar{\omega} = (\omega, w)$ et

$$Y_t(\bar{\omega}) = X_t(\omega) \text{ si } X_0(\omega) \notin \mathbb{R}_+^{(0)} \text{ ou si } T(w) > t$$

$$Y_t(\bar{\omega}) = \left[\frac{t-T}{n}\right]^{(n)} \text{ si } X_0(\omega) \in \mathbb{R}_+^{(0)},\ T(w) \leqq t,$$ n étant alors l'entier tel que $X_{T(w)}(\omega)$ appartienne à I_n

Alors, si Ω est muni d'une loi P^x, et si λ désigne la loi de T, le processus (Y_t) est fortement markovien pour la loi $\bar{P}^x = P^x \times \lambda$. Plus précisément, on obtient ainsi une réalisation d'un semi-groupe de Feller (P_t) dont on peut donner l'expression explicite : pour $x \in \mathbb{R}_+^{(n)}$, $n > 0$, la mesure $P_t(x,dy)$ est la mesure de Dirac au point $x + \frac{t}{n}$ de $\mathbb{R}_+^{(n)}$; pour $x \in \mathbb{R}_+^{(0)}$, la mesure $P_t(x,dy)$ est somme de mesures portées par les $\mathbb{R}_+^{(k)}$, à savoir la mesure ponctuelle de masse e^{-t} au point $x+t$ de $\mathbb{R}_+^{(0)}$, et, sur $\mathbb{R}_+^{(k)}$ pour $k \geqq 1$, la mesure ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue dy

$$p_t(x,y) = 1_{\{0 \leqq y \leqq t/k\}} \cdot 1_{\{x+t-ky \,\in\, I_k\}} \cdot k e^{ky-t}$$

Passons maintenant à la construction de la fonctionnelle additive. Soit f une fonction borélienne positive sur la demi-droite telle que $a = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit fini et non nul, et posons $A_t = \int_0^t f(Y_s)\,ds$.

Comme toute trajectoire a au plus un saut, il est clair que A_∞ est une v.a. finie. Maintenant, si on part de $x \varepsilon \mathbb{R}_+^{(n)}$, $n > 0$, on a $\overline{E}^x[A_\infty] \leqq na < +\infty$; de même, si on part de $x \varepsilon \mathbb{R}_+^{(0)}$, $x \varepsilon I_n$, le saut possible ne peut avoir lieu que dans $\mathbb{R}_+^{(k)}$ avec $k \leqq n$, et donc on a $\overline{E}^x[A_\infty] \leqq na < +\infty$. Reste le cas où x est l'origine de $\mathbb{R}_+^{(0)}$. Nous allons voir qu'alors $\overline{E}^0[A_\infty] = +\infty$; comme l'origine 0 de $\mathbb{R}_+^{(0)}$ est polaire, nous aurons le contre-exemple voulu. On a en effet

$$\overline{E}^0[A_\infty] \geqq \Sigma \lambda\{T \varepsilon I_k\} \; E^{Y_T}[\int_T^\infty f(Y_s)\, ds] = \Sigma\,(e^{-(k-1)} - e^{-k})\; ka = +\infty$$

Il reste que nous ne voyons pas clairement si on peut adapter cet exemple de sorte à avoir les hypothèses de dualité sous lesquelles nous nous étions placés au début de notre exposé du vol. IV.