Claude Dellacherie

Une conjecture sur les ensembles semi-polaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 51-57
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__51_0>

Séminaire de Probabilités
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg

Année 1971/72

UNE CONJECTURE SUR LES ENSEMBLES SEMI-POLAIRES

C. Dellacherie

On désigne par (P_t) un semi-groupe fortment markovien, et vérifiant l'hypothèse de continuité absolue, sur un borélien E d'un espace métrisable compact, par $(\Omega, (\underline{\underline{F}}_t), (X_t), \ldots)$ sa réalisation canonique, et par λ une mesure de référence. On suppose de plus que les points de E sont semi-polaires.

Nous nous intéressons ici au problème de l'équivalence des assertions suivantes, pour un ensemble presque-borélien B,

1) l'ensemble B est semi-polaire

2) l'ensemble B est mince, i.e. satisfait la condition suivante : si (K_i) est une famille quelconque de compacts disjoints contenus dans B, alors les K_i sont polaires, sauf éventuellement pour un sous-ensemble dénombrable d'indices i. (Nous avons attribué un autre sens au mot "mince" dans des publications antérieures).

L'équivalence de ces deux assertions entrainerait que deux processus ayant les mêmes ensembles polaires ont aussi les mêmes ensembles semi-polaires (les points étant supposés semi-polaires).

Avant d'étudier le problème de cette équivalence, nous allons dégager une propriété très intéressante des ensembles minces

THEOREME 1.- <u>Un ensemble presque-borélien</u> B <u>est mince si et seulement si il existe une mesure(bornée)</u>m_B, <u>portée par</u> B, <u>satisfaisant la condition suivante</u> : <u>un ensemble presque-borélien</u> A <u>contenu dans</u> B <u>est polaire si et seulement si on a</u> $m_B(A) = 0$.

DEMONSTRATION.- La condition est évidemment suffisante. Pour démontrer sa necessité, nous établirons d'abord deux lemmes

<u>Lemme</u> 1.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble presque-borélien</u>. <u>Si on a</u> $m(A) = 0$ <u>pour toute mesure (bornée)</u> m <u>ne chargeant pas les polaires, alors</u> A <u>est polaire</u>.

<u>Démonstration</u>.- Si A n'est pas polaire, il existe, d'après le théorème de section, un temps d'arrêt $T > 0$ de $(\underline{\underline{F}}_t^{\lambda})$ dont le graphe est contenu dans l'ensemble $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \varepsilon A\}$ et tel que $P^{\lambda}\{T < +\infty\} > 0$. Définissons une mesure m sur E en posant, pour toute fonction borélienne positive f, $m(f) = E^{\lambda}(f \circ X_T, T < +\infty\}$: la mesure m ne charge pas les polaires et on a $m(A) > 0$.

Les mesures étant intérieurement régulières, on en déduit qu'un ensemble presque-borélien non polaire contient un compact non polaire. On peut alors élargir la définition de "mince" : si (H_i) est une famille quelconque de presque-boréliens disjoints contenu dans l'ensemble mince B, alors les H_i sont polaires sauf éventuellement pour un sous-ensemble dénombrable d'indices

<u>Lemme</u> 2.- <u>Soit</u> $(B_i)_{i \varepsilon I}$ <u>une famille quelconque de presque-boréliens contenus dans l'ensemble mince</u> B. <u>Il existe un sous-ensemble</u> dénombrable J <u>de</u> I <u>tel l'ensemble</u> $B_i - (\bigcup_{j \in J} B_j)$ <u>soit polaire pour tout</u> $i \varepsilon I$.

<u>Démonstration</u>.- Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une famille (B_i) telle que, pour tout sous-ensemble dénombrable J_0 de I il existe un indice i_0 tel que $B_{i_0} - (\bigcup_{j \in J_0} B_j)$ ne soit pas polaire. Désignons alors par $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des familles (H_t) de presque-boréliens disjoints

non polaires telles que tout H_t soit de la forme $B_{i_t} - (\bigcup_{j\in J_t} B_j)$ où $i_t \in I$ et J_t est un sous-ensemble dénombrable de I. L'ensemble $\underline{\underline{H}}$ n'est pas vide par hypothèse, et est inductif pour l'inclusion. Soit (H_s) un élément maximal de $\underline{\underline{H}}$: nous allons montrer que l'ensemble des indices s n'est pas dénombrable, ce qui contredira le fait que B est mince. Si l'ensemble des indices s était dénombrable, il existerait un indice $i\in I$ tel que l'ensemble $B_i - (\bigcup_s B_{i_s})$ ne soit pas polaire. Comme cet ensemble est disjoint de tous les H_s, il pourrait être adjoint à la famille (H_s) : or la famille (H_s) est maximale. D'où la conclusion.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Désignons par (B_i) la famille des presque-boréliens contenus dans B tels que,pour chaque i, il existe une mesure bornée m_{B_i} portée par B_i satisfaisant la condition : un presque-borélien A contenu dans B_i est polaire si et seulement si $m_{B_i}(A) = 0$. Nous dirons pour simplifier que B_i vérifie la propriété (M). Il est clair que toute réunion dénombrable de B_i appartient encore à la famille (B_i). D'après le lemme 2, il existe donc un B_{i_o} tel que $B_i - B_{i_o}$ soit polaire pour tout i. Le théorème sera démontré si on montre que $B - B_{i_o}$ est polaire : comme $B - B_{i_o}$ est mince, il nous suffit donc de montrer qu'un ensemble mince C non polaire contient un ensemble D non polaire vérifiant (M). Soit alors m une mesure ne chargeant pas les polaires telle que $m(C) > 0$ (cf lemme 1); on peut évidemment supposer que m est portée par C. Soit (N_i) la famille des presque-boréliens contenus dans C tels que $m(N_i) = 0$ pour tout i. Toute réunion dénombrable de N_i appartenant encore à (N_i), il existe d'après le lemme 2 un N_{i_o} tel que $N_i - N_{i_o}$ soit polaire pour tout i. Posons $D = C - N_{i_o}$: $m(D) = m(C) > 0$, et il est clair que D vérifie (M) relativement à la mesure m. D'où la conclusion.

Revenons à notre équivalence. L'implication 1) => 2) est facile à obtenir (nous l'avons déjà établie dans "Ensembles aléatoires I", vol III du séminaire)

THEOREME 2.- Tout ensemble presque-borélien semi-polaire est mince

DEMONSTRATION.- Soit B un presque-borélien semi-polaire. D'après un théorème de Hunt bien connu, il existe une suite (T_n) de t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que l'ensemble $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \varepsilon B\}$ soit indistinguable de la réunion des graphes des T_n pour toute loi initiale. Définissons une mesure bornée m_B en posant, pour f borélienne positive sur E,

$$m_B(f) = \sum_n 2^{-n} E\, [f \circ X_{T_n}\, ,\ T_n < +\infty]$$

Un ensemble presque-borélien A contenu dans B est alors polaire si et seulement si $m_B(A) = 0$. On conclut par la partie facile du théorème 1.

La validité de 2) => 1) n'est pas établie en général, mais on connait des cas intéressants où elle est vérifiée

- si (P_t) est le semi-groupe de la translation uniforme sur la droite : les ensembles semi-polaires étant les ensembles dénombrables, il est trivial que les ensembles minces sont semi-polaires

- si (P_t) est le semi-groupe du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 3$: ici, les ensembles semi-polaires sont polaires, et Choquet a montré que la capacité newtonienne est "dichotomique" (un presque borélien B de capacité > a est réunion de deux presques boréliens disjoints B_1 et B_2 ayant chacun une capacité > a), ce qui entraine aisément que les ensembles minces sont polaires (cf Choquet : Sur les fondements de la théorie fine du potentiel. Séminaire Brelot, Choquet, Deny. Paris le année, 1957. En fait, Choquet cite le résultat, en renvoyant à une note aux C.R. où est démontré un lemme ("principe des cages de Faraday") dont on peut déduire la propriété de dichotomie de la capacité).

Nous terminerons en amorçant un raisonnement par l'absurde, qui nous amènera à un processus ayant des propriétés bizarres, sans pouvoir montrer qu'elles sont "absurdes".

Nous supposons donc désormais qu'il existe un presque-borélien B, mince mais non semi-polaire. On sait alors que

- l'ensemble B contient un presque-borélien finement parfait F
- le finement parfait F est le supposrt fin d'une fonctionnelle additive continue (A_t)

Nous avons établi le premier résultat dans "Ensembles aléatoires II", vol III du séminaire; le second a été établi par Azéma dans "Une remarque sur les temps de retour. Trois applications" , vol VI du séminaire. Tous les deux ont été établis sous les hypothèses de Hunt, mais en fait seule la propriété de Markov forte est utilisée dans les démonstrations.

Cela dit, considérons la famille (B_i) des presque-boréliens contenus dans B, et de potentiel nul pour (A_t); cette famille contient en particulier les parties semi-polaires de B. D'après le théorème 1 (ou le lemme 2), il existe un indice i_o tel que tout presque-borélien contenu dans $B-B_{i_o}$ et de potentiel nul pour (A_t) soit en fait polaire. D'autre part, $B-B_{i_o}$ n'est pas semi-polaire (il porte (A_t)), et contient donc un presque-borélien finement parfait F', lequel porte la fonctionnelle additive continue (A'_t) définie par $A'_t = \int_0^t 1_{F'}\circ X_s \, dA_s$. Mieux : F' est le support fin de cette fonctionnelle (le support fin est contenu dans F', et la différence entre les deux est de potentiel nul pour (A_t), donc polaire, et finalement vide)

Considérons le changement de temps (T_t) associé à (A'_t), le processus changé de temps (X_{T_t}), à valeurs dans F', et restreignons les lois initiales à F' : on obtient un processus ayant les propriétés suivantes

1) il est fortement markovien, vérifie l'hypothèse de continuité absolue, et les points sont semi-polaires (même polaires)

2) l'espace d'états est mince (tout ensemble polaire pour (X_t) étant polaire pour (X_{T_t})

3) les presque-boréliens de potentiel nul sont polaires (ils ne diffèrent d'un borélien que par un polaire pour (X_{T_t}) et les boréliens de potentiel nul pour (X_{T_t}) sont ceux de potentiel nul pour (X_t) et (A'_t))

4) toute mesure de référence est du type de celles considérées au théorème 1 pour l'ensemble mince F'

Nous pouvons alors changer de notations, et désigner F' par E et (X_{T_t}) par (X_t). Cela fait, nous allons encore renforcer la propiété 3) de la manière suivante. Soit (B_i) la famille des presque-boréliens contenus dans E, et de la 1ère catégorie de Baire pour la topologie fine. D'après le théorème 1, il existe un indice i_o tel que tout presque-borélien de 1ère catégorie contenu dans $E-B_{i_o}$ soit polaire. Par ailleurs, on sait que E n'est pas de 1ère catégorie (cf Meyer "Processus de Markov", Lecture Notes n°26 p 185) et donc que $E-B_{i_o}$ n'est pas polaire. Mais alors l'intérieur fin de $E-B_{i_o}$ n'est pas vide (en effet, $E-B_{i_o}$ contient un compact non polaire d'après le lemme 1, donc de 2ème catégorie). D'une manière générale, un ensemble presque-borélien contenu dans $E-B_{i_o}$ et non polaire a un intérieur fin non vide. Soit alors U l'intérieur fin de $E-B_{i_o}$, restreignons les lois initiales à U et tuons le processus à la sortie de U. Changeons encore nos notations en appelant (X_t) ce processus tué, et en désignant par E (= U) son espace d'états.

Il a alors les propriétés suivantes

1) il est fortement markovien, vérifie l'hypothèse de continuité absolue, et les points sont semi-polaires (même polaires)

2) un presque-borélien est polaire si et seulement si son intérieur fin est vide. D'une manière plus détaillée, il y a identité entre presque-boréliens polaires, semi-polaires, de potentiel nul, de 1ère catégorie de Baire pour la topologie fine, et d'intérieur fin vide

3) l'espace d'états est mince. Plus précisément, toute mesure de référence ne charge que les presque-boréliens ayant un intérieur fin non vide

En paraphrasant 2), étant donné un presque-borélien B, ou bien (X_t) ne rencontre pas B en des $t>0$, ou bien il y séjourne par intervalles de temps de longueur >0 : c'est ce que nous appelons des propriétés bizarres.

C.Dellacherie
Institut de Recherche Mathématique Avancée
(Laboratoire associé au CNRS)
7 rue René Descartes, 67-Strasbourg