Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Claude Dellacherie

Une démonstration du théorème de Souslin-Lusin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 48-50
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__48_0>

Séminaire de Probabilités

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Université de Strasbourg Annee 1971/72

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SOUSLIN-LUSIN

C. Dellacherie

Nous allons donner une démonstration simple de la forme suivante du théorème sur les images injectives (celle qui est utilisée en théorie des processus)

THÉORÈME 1.- *Soit* B_1 *(resp* B_2*) un borélien d'un espace métrisable compact, et soit* f *une fonction borélienne, injective, de* B_1 *dans* B_2*. Alors* $f(B_1)$ *est borélien dans* B_2.

Comme toute démonstration connue jusqu'ici, il nous faudra passer par l'intermédiaire de la théorie des ensembles analytiques, et employer un théorème de séparation. Plus précisément, nous utiliserons le théorème suivant (qui est une conséquence facile du théorème de capacitabilité. Voir mon exposé dans le volume V)

THÉORÈME 2.- *Soit* (A_i) *une suite d'ensembles analytiques disjoints d'un espace métrisable compact. Il existe une suite* (B_i) *de boréliens disjoints telle que* B_i *contienne* A_i *pour tout* i.

Le théorème 1 va être une conséquence immédiate du lemme suivant, qui a son intérêt propre

LEMME.- Soient E, F deux espaces métrisables compacts, et A une partie analytique de E. Soit d'autre part g une application de A dans F dont le graphe $G = \{(x,y) \in E \times F : x \in A \text{ et } y = g(x)\}$ soit une partie analytique de $E \times F$. Il existe alors une application borélienne h de E dans F dont la restriction à A soit égale à g.

DÉMONSTRATION.- Nous allons construire h à l'aide du procédé habituel pour approcher g par des fonctions en escalier. Munissons F d'une distance d compatible avec sa topologie, et, pour chaque entier n, soit (H_i^n) une partition dénombrable de F en boréliens de diamètre $\leq 1/n$. Posons, pour chaque couple d'entiers (n,i)

$$A_i^n = g^{-1}(H_i^n) = p[G \cap (E \times H_i^n)]$$

où p désigne la projection de $E \times F$ sur E. Comme G est analytique, les A_i^n sont analytiques, et forment, pour n fixé, une partition de A. Si on choisissait un point y_i^n dans chaque H_i^n, les fonctions en escalier (non boréliennes) g^n définies sur A par $g^n(x) = y_i^n$ pour $x \in A_i^n$ convergeraient vers g lorsque n tend vers l'infini. Mais, avant de faire cela, nous allons appliquer le théorème de séparation pour obtenir des fonctions en escalier boréliennes. Séparons donc, pour n fixé, les analytiques A_i^n par des boréliens disjoints B_i^n. Puis, choisissons un point y_i^n dans chaque H_i^n et un point arbitraire y_0 de F. Définissons enfin des fonctions en escalier boréliennes h^n sur E en posant $h^n(x) = y_i^n$ pour $x \in B_i^n$ et $h^n(x) = y_0$ pour x dans le complémentaire de $\bigcup_i B_i^n$. Il ne reste plus qu'à prendre pour fonction h l'application égale à $\lim_n h^n$ là où cette limite existe, et égale à y_0 là où cette limite n'existe pas.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.- Ramenons nous à la situation du lemme en prenant pour E (resp F) un espace métrisable compact contenant B_2 (resp B_1), et en prenant pour g l'application f^{-1} définie sur $f(B_1) = A$, qui est analytique. Le graphe G de g est celui de f : il est borélien, et donc analytique. Mais le graphe H de l'application h du lemme est aussi borélien, et le complémentaire de $f(B_1)$ dans E est égal à la projection de $H-G$ sur E : il est aussi analytique. Une nouvelle application du théorème de séparation montre que $f(B_1)$ est alors borélien.

REMARQUES.- 1) La démonstration s'étend sans difficulté au cas où B_1 est un espace lusinien et B_2 un espace souslinien, non nécessairement métrisables (terminologie de Bourbaki), et où f est une application borélienne injective de B_1 dans B_2.

2) Le lemme montre aussi aisément pourquoi un borélien ne peut en général être "uniformisé" par un ensemble analytique (ce qui est bien connu). Le problème est le suivant : B est borélien dans $E\times F$, produit d'espaces métrisables compacts. Trouver un ensemble analytique A contenu dans B tel que la projection de A sur E soit égale à celle de B et que, pour chaque $x\in E$, l'ensemble $A\cap\{x\}\times F$ ait au plus un point. Supposons qu'un tel A existe : on définit alors une fonction g sur la projection p(A) de A sur E par $g(x)$ = le seul point de $A\cap\{x\}\times F$. On étend g en une fonction borélienne h comme dans le lemme. Mais alors A, intersection de B et du graphe de h, est forcément borélien, et donc sa projection p(A) est forcément borélienne d'après le théorème 1. Mais p(A) est aussi la projection de B, et n'est pas borélien en général.