

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Un crible généralisé

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 33-35

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__33_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN CRIBLE GÉNÉRALISÉ

C. Dellacherie

Soient E et F deux espaces métrisables compacts, et soit A une partie analytique du produit $E \times F$. DOOB m'a posé la question suivante : est-ce que l'ensemble des $y \in F$ tels que la coupe $A(y)$ soit de la 2^{ème} catégorie de Baire dans E , est analytique dans F ? Je donne ici une réponse affirmative partielle, dans le cas où A est borélien.

Nous désignerons par E (resp F) un espace métrisable compact, et par x (resp y) un point générique de E (resp F). Pour toute partie A de $E \times F$, nous noterons $\text{adh}(A)$ (resp $\text{int}(A)$) la partie de $E \times F$ dont la coupe suivant tout $y \in F$ est égale à l'adhérence (resp l'intérieur) de $A(y)$ dans E .

D'abord, deux petits lemmes sur $\text{adh}(A)$ et $\text{int}(A)$ pour A analytique (le premier n'est pas nouveau : voir par exemple la monographie de HOFFMANN-JØRGENSEN).

- 1 PROPOSITION.- Si A est analytique dans $E \times F$, alors $\text{adh}(A)$ est aussi analytique.

DÉMONSTRATION.- Soit \underline{U} une base dénombrable d'ouverts de E , et désignons par π la projection de $E \times F$ sur F . Pour tout $U \in \underline{U}$,

posons $A^U = U \times \pi[A \cap (U \times F)]$: on a $(x, y) \in A^U$ si et seulement si on a $x \in U$ et s'il existe $x' \in U \cap A(y)$. L'ensemble A^U est évidemment analytique, et donc aussi $\text{adh}(A)$, égal à l'intersection des A^U lorsque U parcourt \underline{U} .

Il n'est pas vrai en général que $\text{int}(A)$ soit analytique pour A analytique. On a cependant.

- 2 PROPOSITION.- Si A est analytique dans $E \times F$, alors $\text{int}[\text{adh}(A)]$ est aussi analytique.

DÉMONSTRATION.- Etant donnée la proposition précédente, il suffit de démontrer que $\text{int}(A)$ est analytique pour A analytique tel que $A = \text{adh}(A)$. Soient \underline{U} une base dénombrable d'ouverts de E , et D un ensemble dénombrable partout dense dans E . Pour tout $d \in D$, posons $A^d = A \cap [E \times \pi(A \cap (\{d\} \times F))]$, où π désigne la projection sur F . L'ensemble A^d est analytique, et on a $A^d(y) = A(y)$ si $d \in A(y)$ et $A^d(y) = \emptyset$ sinon. Pour tout $U \in \underline{U}$, posons alors $A^U = \bigcap A^d$ où d parcourt l'ensemble $D \cap U$. L'ensemble A^U est analytique, et, comme $A = \text{adh}(A)$, on a $A^U(y) = A(y)$ si $A(y)$ contient U , et $A^U(y) = \emptyset$ sinon. Comme $\text{int}(A)$ est alors égal à la réunion des ensembles $A^U \cap (U \times F)$ lorsque U parcourt \underline{U} , il est clair que $\text{int}(A)$ est analytique.

Passons maintenant à l'étude de notre crible généralisé. Pour simplifier, nous dirons qu'une partie A de $E \times F$ a la propriété (P) si on peut écrire A sous la forme $A = U \Delta N$, où U est un ensemble analytique tel que $U = \text{int}[\text{adh}(U)]$ et où N est tel que chacune des coupes $N(y)$ soit de la 1ère catégorie de Baire.

- 3 THÉORÈME.- L'ensemble des parties analytiques de $E \times F$ ayant la propriété (P) est stable pour les réunions et intersections dénombrables.

DÉMONSTRATION.- Soit (A_n) une suite de parties analytiques ayant la propriété (P), et, pour chaque n , soit $A_n = \bigcup_n \Delta N_n$ la décomposition de A_n vue ci-dessus. On a, d'une manière équivalente, $\bigcup_n N_n \subset A_n \subset \bigcup_n \bigcup_n N_n$, et donc,

$$\begin{aligned} (\bigcup_n) - (\bigcup_n) &\subset (\bigcup_n) \subset (\bigcup_n) \cup (\bigcup_n) \\ (\bigcap_n) - (\bigcup_n) &\subset (\bigcap_n) \subset (\bigcap_n) \cup N \end{aligned}$$

où N est une réunion dénombrable d'ensembles contenus dans un des N_n . Les ensembles (\bigcup_n) et N ont encore leurs coupes de lère catégorie. D'après la proposition 2, il nous suffit de vérifier que (\bigcup_n) (resp (\bigcap_n)) ne diffère de $\text{int}[\text{adh}(\bigcup_n)]$ (resp de $\text{int}[\text{adh}(\bigcap_n)]$) que par un ensemble dont les coupes sont de lère catégorie (au sens de la différence symétrique), ce qui est évident.

4 COROLLAIRE.- Soit A une partie borélienne de $\text{Ex}F$. Alors l'ensemble $C(A) = \{y : A(y) \text{ est de 2ème catégorie}\}$ est analytique dans F.

DÉMONSTRATION.- Comme tout ouvert de $\text{Ex}F$ vérifie la propriété (P), il résulte du théorème précédent que tout borélien la vérifie aussi. On est donc ramené à montrer que $C(A)$ est analytique pour toute partie analytique A telle que $A = \text{int}[\text{adh}(A)]$: mais, dans ce cas, $C(A)$ n'est autre que la projection de A sur F .