GABRIEL MOKOBODZKI

Pseudo-quotient de deux mesures, application à la dualité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 318-321

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__318_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
Séminaire de Probabilités

PSEUDO-QUOTIENT DE DEUX MESURES
APPLICATION A LA DUALITE

G. MOKOBODZKI

Ce texte est la fin de l'exposé de l'an dernier, portant le même titre, p. 173-176 du volume VI, qui n'avait pas été insérée dans le volume VI par suite d'une erreur.

RESULTATS COMPLEMENTAIRES

Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, on désignera par $D(\frac{\nu}{\mu})$ une fonction numérique quelconque telle que $\varphi \leq D(\frac{\nu}{\mu}) \leq \psi$ où φ et ψ sont définies comme précédemment.

En particulier $D(\frac{\nu}{\mu})$ est $(\mu+\nu)$-mesurable.

PRINCIPE DE DOMINATION.

Si $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq 1$ ν-presque partout, alors $\nu \prec \mu$.

Démonstration : On a $\{\varphi \leq 1\} = \bigcap_{\lambda>1} F_\lambda$ et $\nu^{F_\lambda} = \nu \prec \lambda\mu$ pour tout $\lambda > 1$.

COROLLAIRE.- Si $\nu, \nu' \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ et $\nu, \nu' \prec k\mu$, $k > 0$, alors $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq D(\frac{\nu'}{\mu})$ ν-presque partout entraîne que $\nu \prec \nu'$.

POTENTIELS ET MESURES REGULIERES.

On dit que $u \in \mathcal{S}$ est régulier si pour toute famille filtrante croissante $(u_\alpha) \subset \mathcal{S}$, telle que $u = \sup u_\alpha$, alors $\inf R(u-u_\alpha) = 0$ (sauf sur un ensemble polaire).

THEOREME.- Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit que $u = \sum_n u_n$ où $u_n \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}^+(X)$.

Il existe alors un noyau U subordonné à $\mathcal{S}$ et un seul tel que $U1 = u$ ($U = \Sigma U_n$ où U_n est associé à u_n).

THEOREME.- <u>Pour</u> $\nu, \mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, <u>il existe une mesure et une seule</u> $\sigma \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ <u>telle que</u> $< \sigma, Vf > = \sup\{< \nu-\mu, p >, p \in \mathcal{S}, p \leq Vf\}$ <u>pour toute</u> $f \in C^+(X)$.

On peut alors poser $\sigma = R(\nu-\mu) = \inf\{\theta \in \mathcal{M}^+(\partial X) \; ; \; \theta \succ \nu - \mu\}$, enveloppe inférieure pour l'ordre du balayage défini par $\mathcal{S}$.

THEOREME.- <u>Le couple</u> $(\mathcal{M}^+(\partial X), \prec)$ <u>est un cône de potentiels, c'est-à-dire que</u> si <u>si</u> $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, <u>on a</u> $R(\nu-\mu) \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ <u>et</u> $R(\nu-\mu) \leq \nu$.

DEFINITION.- <u>On dit que</u> $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ <u>est régulière si pour toute famille</u> $(\nu_\alpha) \subset \mathcal{M}^+(\partial X)$, <u>filtrante croissante pour l'ordre</u> $\prec$ <u>et telle que</u> $\nu = \sup_{\prec} \nu_\alpha$, <u>on a</u> $\inf_{\prec} R(\nu-\nu_\alpha) = 0$.

PROPOSITION.- <u>Pour que</u> $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ <u>soit régulière, il faut et il suffit que</u> μ <u>ne charge pas les ensembles semi-polaires de</u> ∂X.

DEFINITION.- <u>On dit que</u> ν <u>est dominée par</u> θ $(\nu \in d(\theta))$ <u>si pour toute famille filtrante décroissante</u> (ν_α) <u>pour l'ordre</u> $\leq$, <u>telle que</u> $\nu_\alpha \leq \nu$ <u>et</u> $\inf \nu_\alpha = 0$, <u>alors pour tout</u> $\epsilon > 0$, <u>il existe</u> α <u>tel que</u> $\nu_\alpha \prec \epsilon\,\theta$.

LEMME.- <u>Pour toute mesure régulière</u> ν, <u>il existe une mesure régulière</u> θ, <u>de la forme</u> $\theta = \Sigma \nu_n$, $\nu_n \leq \nu$ <u>telle que</u> $\nu \in d(\theta)$, $\nu_n \in d(\nu)$ <u>et</u> $\int v\,d\nu_n < +\infty$ $\forall v \in \mathcal{S}$.

<u>Propriétés des mesures régulières.</u>

1) L'ensemble des mesures régulières est un sous-cône convexe héréditaire de $\mathcal{M}^+(\partial X)$ que l'on notera $\mathcal{S}_r^*$.

2) Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que $(u \in \mathcal{S}$ et $\int u\,d\mu = 0) \Rightarrow (u = 0)$ alors pour toute $\nu \in \mathcal{S}_r^*$ telle que $\int v\,d\nu < +\infty$ $\forall v \in \mathcal{S}$, il existe $k > 0$ tel que $\nu \prec k\mu$.

3) Il existe une suite (μ_n) de mesures régulières, stable par ad-

dition, de base V , telle que a) la famille μ_n est filtrante croissante pour l'ordre $\prec$ et pour toute mesure régulière ν on a $\nu = \sup\limits_{\prec}\{\mu_n ; \mu_n \prec \nu\}$

b) pour toute μ_n , il existe μ_m telle que $\mu_n \in d(\mu_m)$

c) $\int v\, d\mu_n < +\infty \quad \forall v \in \mathcal{S}$.

Désignons par $\mathcal{S}_0^* = \{\nu \in \mathcal{S}_r^* \; ; \text{ il existe } \mu_n, \; \nu \prec \mu_n\}$.

THEOREME.- <u>Pour toute forme linéaire</u> T <u>sur</u> $(\mathcal{S}_0^* - \mathcal{S}_0^*)$ <u>croissante pour l'ordre</u> $\prec$ <u>il existe une fonction excessive et une seule</u> $u \in \mathcal{S}$, <u>telle que</u> $< T, \nu > = \int u\, d\nu \quad \forall \nu \in \mathcal{S}_0^*$.

De ce théorème, il résulte que $\mathcal{S}$ est faiblement complet métrisable pour la topologie $\sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0^*)$ et qu'on peut appliquer le théorème de représentation intégrale de Choquet.

PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ <u>telle que</u> V <u>soit de base</u> μ_0 . <u>Il existe alors un ensemble borélien</u> $A \subset \partial X$ <u>tel que</u> $\complement A$ <u>soit</u> μ_0<u>-polaire</u> (donc polaire) <u>et telle que pour toute</u> $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, $D(\frac{\nu}{\mu_0})$ <u>soit finement continue en tout point de</u> A, <u>donc bien définie en tout point de</u> A .

On suppose A fixé ainsi que μ_0 et que μ_0 est de base V .

COROLLAIRE.- <u>Pour toute</u> $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, <u>l'application</u> $f \mapsto 1_A . D(\frac{f.\nu}{\mu})$ <u>est un noyau compact de base</u> ν <u>transformant fonction boréliennes bornées en fonctions boréliennes bornées et satisfaisant au principe complet du maximum</u>.

(Rappelons que toute $\nu \in \mathcal{S}_r^*$ s'écrit $\nu = \sum\limits_n \nu_n$, $\nu_n \in \mathcal{S}_0^*$) .

COROLLAIRE.- <u>Il existe</u> $\mu_1 \leq \mu_0$, μ_0 <u>de base</u> μ_1 <u>telle que le noyau</u> $T : f \to 1_A . D(\frac{f.\mu_1}{\mu_0})$ <u>soit compact, satisfasse au principe complet du maximum</u>.

On peut donc définir un cône de fonctions T-excessives Γ et définir une frontière $\partial^* X$, associée à T et portant le noyau T , par la relation

$$(y \in \partial^* X) \Leftrightarrow (\forall u, v \in \Gamma \;\; \widehat{\inf\, u, v}(y) = [\inf(u,v)](y))$$

PROPOSITION 1.- 1) <u>L'ensemble</u> $\overset{*}{\partial} X$ <u>est borélien et porte toute mesure régu-lière</u>. (On a pris $\overset{*}{\partial} X \subset \partial X$).

2) <u>Pour tout</u> $y \in \overset{*}{\partial} X$, <u>il existe une fonction excessive extrémale male et une seule</u> $G_y \in \mathcal{S}$ <u>telle que, pour toute</u> $f \in B^+$

$$Tf(y) = \int G_y(x) f(x) d\mu_1(x) .$$

Si l'on pose $G(x,y) = G_y(x)$ pour $y \in \overset{*}{\partial} X$, $x \in X$, alors l'application G est mesurable sur $\overset{*}{\partial} X \times X$.

3) Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe une mesure régulière ν sur ∂X, telle que $u(x) = G_\nu(x) = \int G(x,y) d\nu(y)$.