SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARK A. PINSKY

Fonctionnelles multiplicatives opératrices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 273-283
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__273_0>

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES OPERATRICES

Mark A. PINSKY

Dans cet exposé, nous donnons les définitions et l'énoncé des résultats principaux sur les fonctionnelles multiplicatives opératrices (FMO), ainsi que quelques applications. Les démonstrations et les autres détails se trouvent dans notre article [13] .

On est amené à considérer les FMO en partant d'un processus de Markov à deux composantes, dont la deuxième est un processus à accroissements indépendants, conditionnellement sur la première [3,4] . Ainsi nous arrivons à un cas spécial des "évolutions aléatoires" [5] qui, à son tour, est un cas spécial d'une FMO.

Les résultats les plus intéressants sont 1°) les théorèmes de représentation et 2°) les théorèmes de convergence. Dans le premier cas nous partons d'un processus de Markov donné X et nous cherchons toutes les FMO de X. Les résultats sont les plus complets dans le cas des chaînes et des diffusions. Pour les théorèmes de convergence, il s'agit d'une suite M_ε de FMO qui converge vers l'identité pour chaque $t > 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous cherchons alors le comportement de la suite des espérances lorsque simultanément $t \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$.

0.- Définitions.

Soit $X = (x_t, P_x)$ un processus de Markov sur l'espace $(E, \mathcal{B})$ supposé localement compact métrisable. Nous supposons que les trajectoires $t \to x_t$ sont continues à droite et sont définies sur l'intervalle $0 \leqq t < \infty$. Soit F_t la tribu complètée de $(x_s \; ; \; s \leqq t)$ par rapport à tous les P_x.

Soit L un espace de Banach séparable ; $\mathcal{L}(L)$ est l'ensemble de toutes les applications linéaires de L dans L. Si $\{A_n\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}(L)$ nous écrirons $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} A_n = A_o$ lorsque pour tout $f \in L$, $\lim_{n \to \infty} A_n f = A_o f$.

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les intervalles finis dans $[0,\infty)$. Nous écrirons $J_1 < J_2$ lorsque $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$ entraîne que $x_1 < x_2$. Une fonctionnelle multiplicative opératrice de (X,L) est une application

$$(J,\omega) \to M(J,\omega)$$

de $\mathcal{J} \times \Omega \to \mathcal{L}(L)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(P_1) Si $J_1 \in \mathcal{J}$, $J_2 \in \mathcal{J}$ et $J_1 \cup J_2 \in \mathcal{J}$ avec $J_1 < J_2$, alors $M(J_1 \cup J_2,\omega) = M(J_1,\omega)\, M(J_2,\omega)$.

(P_2) L'application $\omega \to M(J,\omega)$ est F_J mesurable(*) pour chaque $J = (0,t]$, $f \in L$

(P_3) Pour chaque $J \in \mathcal{J}$, $t > 0$, $M(J+t,\omega) = M(J, \theta_t\omega)$.

(P_4) Si $J_n \in \mathcal{J}$ et $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ (resp. $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$) et $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \in \mathcal{J}$ (resp. $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \in \mathcal{J}$) alors $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} M(J_n,\omega) = M(J,\omega)$.

(P_5) $M(\{0\},\omega) = I$.

Dans la propriété (P_1), il faut que l'ordre chronologique des facteurs soit respecté ; autrement l'opérateur (1.1) ci-dessous n'est pas un semi-groupe, en général.

La propriété (P_4) entraîne que l'application : $t \to M((0,t],\omega)$ est fortement continue à droite. Soit $\tilde{L}_\infty$ l'ensemble de toutes les applications bornées et mesurables de E dans L. Nous définissons le <u>semi-groupe des espérances</u> par la formule :

$$(\tilde{T}(t)\,\tilde{f})_x = E_x\{M((0,t],\omega)\, f_{x_t(\omega)}\} \tag{1.1}$$

où $\tilde{f} = (f_x)$ est un élément de $\tilde{L}_\infty$. La proposition suivante est presque immédiate.

<u>Proposition</u> : <u>Soit M une FMO de</u> (X,L) <u>telle que</u> $\sup_{x\in E} E_x \|M((0,t))\| < \infty$. <u>Alors</u>

a) <u>La formule (1.1) définit un semi-groupe d'opérateurs sur</u> $\tilde{L}_\infty$

(*) $F_J = \bigvee_{t\in J} F_t$.

b) $\lim_{t \to 0} (\tilde{T}(t)\tilde{f})_x = f_x$ si $\tilde{f} \in \tilde{L}_\infty$ est uniformément continue sur E et $||M(0,t)||$ est uniformément intégrable P_x lorsque $t \to 0$.

c) Si M_1, M_2 sont des FMO de (X,L) dont les semi-groupes des espérances sont $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$ et si $\tilde{T}_1(t)\tilde{f} = \tilde{T}_2(t)\tilde{f}$ pour tout $\tilde{f} \in \tilde{L}_\infty$, alors pour chaque $x \in E$, $J \in \mathcal{J}$
$P_x\{M_1(J,\omega) = M_2(J,\omega)\} = 1$.

Donc le semi-groupe des espérances détermine univoquement la FMO. Par conséquent, lorsque nous cherchons la structure d'une classe de FMO, il suffit d'abord de préciser la forme du semi-groupe des espérances.

I-THEOREMESDE REPRESENTATION

Si X est un processus de Markov avec un nombre fini d'états, des exemples intéressants de FMO se trouvent dans les travaux de GRIEGO et HERSH (5) sur les "évolutions aléatoires". Dans ces cas, l'application $t \to M(0,t]$ est toujours fortement continue. Pour trouver les FMO les plus générales, il suffit d'insérer un opérateur à l'instant du saut du processus. Nous avons donc les résultats suivants.

THEOREME 1A :

Soit M une FMO de (X,L) où X est un processus étagé : $(P_x\{\exists t=t(x,\omega) > 0 : x_s = x_o$ pour $0 \leq s < t\} = 1)$ et telle que $||M(J,\omega)|| \leq 1$. Alors il existe des semi-groupes fortement continus $\{T_x(t)\}_{x \in E}$ sur L et des opérateurs $\{P_{xy}\}_{x \neq y}$ tels que

$$(1.2) \quad M(0,t] = T_{x_o}(\tau_1) P_{x_o x_{\tau_1}} T_{x_{\tau_1}}(\tau_2 - \tau_1) P_{x_{\tau_1} x_{\tau_2}} \cdots$$
$$\cdots T_{x_{\tau_{N(t)}}}(t - \tau_{N(t)})$$

où $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ désigne les discontinuités de $t \to x_t$. $N(t)$ est défini par les inégalités $\tau_{N(t)} \leq t < \tau_{N(t)+1}$.

THEOREME 1B :

Soit M *une FMO de* (X,L) *où* X *est un processus étagé et l'application* $t \to M((0,t],\omega)$ *est continue p.s. Alors il existe des semi-groupes fortement continus* $\{T_x(t)\}_{x \in E}$ *sur* L, *tels que*

$$M(0,t] = T_{x_0}(\tau_1)\, T_{x_{\tau_1}}(\tau_2-\tau_1) \dots T_{x_{\tau_{N(t)}}}(t-\tau_{N(t)}) \;.$$

Exemple. Soient $X = \{1,2,\dots,N\}$, $L = C_0(R^1)$ (fonctions continues, nulles à l'infini), $T_x(t) = \exp(tA_x)$, $P_{xy}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(\xi+\eta)\Pi_{xy}(d\eta)$ où

$$A_x f(\xi) = \frac{1}{2}\sigma_x^2 f''(\xi)+b_x f'(\xi)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left(f(\xi+\eta) - f(\xi) - \sin\eta\, f'(\xi)\right) M_x(d\eta)$$

où M_x et Π_{xy} sont des mesures sur R^1 telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2}{1+\eta^2} M_x(d\eta) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\Pi_{xy}(d\eta) = 1.$$

Dans ce cas [3,4] $\mathcal{T}(t)$ est un semi-groupe de Markov, qui correspond à un processus sur l'espace produit $\{1,2,\dots,N\} \times R^1$, qui peut s'écrire sous la forme (x_t, ξ_t). x_t est une chaîne de Markov sur $\{1,\dots,N\}$ tandis que la loi de $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ conditonnellement sur $\{x_t,\ t \geq 0\}$ est celle d'un processus à accroissements indépendants, non-homogène dans le temps. Lorsque x_t reste dans l'état x, ξ_t est identique à un processus à accroissements indépendants, engendré par l'opérateur A_x ; lorsque x_t saute à l'état y, ξ_t saute selon la loi de probabilité Π_{xy}. pour des renseignements plus complets sur de tels processus, surtout dans le cas d'un espace d'états plus général, voir (1) .

Revenant au cas général, il est facile de démontrer que la FMO (1.2) satisfait à une équation stochastique

$$(1.3) \quad M(0,t]f = f + \int_0^t M(0,u]\, A_{x_u} f\, du$$

$$+ \sum_{0\leq\tau_k\leq t} M(0,\tau_k)\,\{P_{x_{\tau_{k-1}},x_{\tau_k}} - I\}\, f$$

si $f \in D_{A_x}$, le domaine du générateur infinitésimal du semi-groupe $T_x(t)$. La deuxième somme peut s'écrire sous la forme

$$\int_0^t M(0,s^-)\ (P_{x_s - x_{s^-}} - I)\ dN(s)$$

une sorte d'intégrale stochastique par rapport au processus X. Ceci nous amène au cas suivant.

Prenons maintenant $L = R^N$, X = le mouvement brownien sur R^d où N et d sont des entiers quelconques. Considérer l'équation stochastique

$$(1.4) \qquad M(t) = I + \int_0^t M(u)\ A(x_u)du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t M(u)\ B_j(x_u)dx_u^j$$

où $x \to A(x)$, $x \to B_j(x)$ sont des fonctions bornées et boréliennes à valeurs dans $\mathcal{L}(R^N)$. La deuxième intégrale est celle d'Itô.

<u>PROPOSITION</u>. <u>Soit</u> $X = (x_t, P_x)$ <u>un mouvement brownien dans</u> R^d. <u>Alors l'équation stochastique (1.4) possède une solution unique</u> $t \to M(0,t)$ <u>qui est une FMO continue de</u> (X, R^N).

L'équation (1.4) fût considérée par D.W. STROOCK [14] dans son étude des systèmes paraboliques. Il n'est pas vrai, pour le mouvement brownien, que toute FMO (même continue) vient d'une solution de (1.4). Considérons à titre d'exemple, la FMO réelle $M_t = \exp(-f_t)$ où f_t est le temps local à l'origine. Dans notre article [12] nous avons trouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une FMO de (X,L) soit équivalente à une solution de (1.4). Il s'agit de l'existence des limites suivantes :

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} A(x) &= \lim_{t \to o} \frac{1}{t} E_x \{M(0,t] - I\} \\ B_j(x) &= \lim_{t \to o} \frac{1}{t} E_x \{M(0,t] - I)\ (x_t^j - x_o^j)\} \end{aligned}$$

où les limites sont uniformes dans $x \in R^d$. Nous supposons en outre que l'application $t \to M(0,t]$ est continue p.s. et dans L^2. Nous prenons pour L un espace de Hilbert séparable.

THEOREME 2A :

Soit $t \to M(0,t]$ *une FMO de* (X,L) *satisfaisant aux conditions (1.5). Alors* $P_x\{M(0,t] = M_1(0,t]\} = 1$, *où* M_1 *est la solution unique de l'équation stochastique (1.4).*

La démonstration déduite [12] repose sur une représentation intégrale du semi-groupe des espérances de certaines inégalités élémentaires de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\delta}{\delta x_i} E_x f(x_t)\right|^2 dx \leq (\text{const})\ t^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Dans la recherche de conditions plus élégantes que (1.5), nous avons trouvé une application de l'intégrale stochastique par rapport aux martingales continues [8,10] . Il s'agit de considérer seulement les FMO pour lesquelles

$$(1.6) \qquad E_x\{M(0,t)\} = I$$

Ceci entraîne que le processus $\{M(0,t], t \geq 0\}$ est une martingale vectorielle. Le résultat suivant suggère que, sous des conditions supplémentaires très faibles, la deuxième partie de (1.5) est déjà satisfaite.

THEOREME 2B :

Soit $t \to M(0,t]$ *une FMO de* (X,L) *où* X *est un mouvement brownien à une dimension et* $M(0,t)$ *est inversible pour chaque* $t > 0$ *et satisfait à (1.6). Alors presque sûrement* $M = M_1$, *la solution de l'équation (1.4) avec* $A = 0$.

La démonstration repose sur l'existence de l'intégrale stochastique $C_t = \int_0^t M_s^{-1}\, dM_s$. C_t est une fonctionnelle additive de X dont l'espérance est zéro. Donc par le théorème de TANAKA et VENTCEL [16, 17] , elle a une représentation sous la forme $C_t = \int_0^t B(x_s)dx_s$ pour une fonction convenable $x \to B(x)$.

II-THEOREMES DE CONVERGENCE

Nous revenons maintenant au cas $E = \{1,2,\ldots,N\}$. X est donc une chaîne de Markov sur un espace fini. Nous supposons en outre qu'elle est irréductible et donc ergodique. Nous considérons une suite $\{M_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de FMO de (X,L) telle que $M_\varepsilon(0,t] \to I$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Nous cherchons à trouver sous quelles conditions il existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_x\{M_\varepsilon(0,t/\varepsilon]\, f\}$$

pour chaque $f \in L$. Si cette limite est triviale (c'est-à-dire $= f$), il est naturel de se demander s'il existe une limite plus raffinée

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_x\{M_\varepsilon(0,t/\varepsilon^2]\ f\}.$$

Ici nous avons des généralisations pour respectivement la loi faible des grands nombres et la loi limite centrale pour les fonctionnelles additives des chaînes de Markov. En effet, dans le cas où les $M(0,t]$ sont tous commutatifs, l'existence de ces deux limites est une conséquence des théorèmes classiques sur les chaînes de Markov. Voici les résultats généraux [6, 9, 13] .

THEOREME 3A :

Soit $\{M_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *une suite de FMO de* (X,L) *et supposons que*

$$(3.1)\qquad E_1\{M_\varepsilon(0,\sigma_1]\} = I + \varepsilon\mu W + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

où $\sigma_1 = \inf\{t > \tau_1 : x_t = x_0\}$, $\mu = E_1(\sigma_1)$. *Nous supposons que* $\overline{W}$ *est le générateur d'un semi-groupe de contractions* $e^{t\overline{W}}$ *et que la convergence (3.1) a lieu sur un ensemble* D*, partout dense dans* L*, tel que* $(\beta - \overline{W})\,D$ *est dense dans* L *pour chaque* $\beta > 0$. *Alors pour* $1 \leq i \leq N$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_i\{M_\varepsilon(0,t/\varepsilon]\ f\} = e^{t\overline{W}} f \qquad (f \in D,\ t > 0)$$

THEOREME 3B :

Supposons que $\overline{W} = 0$ mais qu'on a un développement

$$E_1 \{M_\varepsilon(0,\sigma_1]\} = I + \varepsilon^2 \mu\overline{V} + o(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \downarrow 0) \tag{3.2}$$

où $\overline{V}$ est le générateur d'un semi-groupe de contractions $e^{t\overline{V}}$. La convergence a lieu sur un ensemble D partout dense dans L, tel que $(\beta - \overline{V})\, D$ est dense dans L pour chaque $\beta > 0$. Alors pour $1 \leq i \leq N$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_i \{M_\varepsilon(0,t/\varepsilon^2] f\} = e^{t\overline{V}} f \qquad (f \in D,\ t > 0).$$

Dans les applications, M_ε est souvent de la forme (1.2) où $T_x(t) = \exp(\varepsilon t A_x)$ et $P_{xy} = I + \varepsilon B_{xy} + o(\varepsilon)$. Dans ce cas, $\overline{W} = \sum_{i=1}^{N} p_i A_i + \sum_{1\leq i\neq j\leq N} p_i q_{ij} B_{ij}$ où (p_i) est la mesure invariante de X. $\overline{V}$ est une fonction quadratique des $\{A_1, \ldots, B_{N-1,N}\}$ [7]. Lorsque $B_{xy} = 0$, cette fonction $= \sum_{1\leq i,j\leq N} c_{ij} A_i A_j$ où $c_{ij} = p_i \int_0^\infty (p_{ij}(t) - p_j)\,dt$, l'opérateur potentiel de la chaîne X dont $p_{ij}(t) = P_i\{x_t = j\}$ [6].

Pour une application concrète de ces résultats, considérons le problème de la description du support d'un processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré, déjà traité par STROOCK et VARADHAN (15).

Soient, donc $A_0, \ldots, A_r$ des opérateurs différentiels du premier ordre sur R^d, dont les coefficients satisfont à une condition de Lipschitz uniforme, ainsi que leurs premières dérivées. Soit $N = 2r + 1$ et considérons une chaîne de Markov sur $\{0,\ldots,N\}$ dont la matrice infinitésimale est

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \;.\,.\,.\,.\,. & 0 \\ 0 & -1 & 1 \;.\,.\,.\,.\,. & 0 \\ & & & \\ 1 & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $q_{ii} = -1$ $(0 \leq i \leq N)$, $q_{i,i+1} = 1$ $(0 \leq i \leq N-1)$, $q_{N1} = 1$ et ailleurs $q_{ij} = 0$. Soit

$$T_o^{(\varepsilon)}(t) = \exp(t\varepsilon^2 A_o)$$

$$T_{2k-1}^{(\varepsilon)}(t) = \exp(t\varepsilon A_k) \qquad (1 \leq k \leq r)$$

$$T_{2k}^{(\varepsilon)}(t) = \exp(-t\varepsilon A_k) \qquad (1 \leq k \leq r)$$

et définissons une FMO par la formule

$$M_\varepsilon(0,t] = T_{x_o}^{(\varepsilon)}(\tau_1)\, T_{x_{\tau_1}}^{(\varepsilon)}(\tau_2 - \tau_1) \ldots T_{x_{\tau_{N(t)}}}^{(\varepsilon)}(t - \tau_{N(t)}) \, .$$

Dans ce cas il est facile de voir que $\overline{W} = 0$. Comme les transitions $i \to j$ ne sont pas aléatoires, on peut calculer (3.2) et voir en plus que $\overline{V} = A_o + \sum_{i=1} A_i^2$ [13] ; si on écrit $A_i f = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \frac{\delta f}{\delta x_j}$, alors $\overline{V}$ est de la forme

$$\overline{V}f = 1/2 \sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{ij}(x) \frac{\delta^2 f}{\delta x_i\, \delta x_j} + \sum_{1 \leq i \leq d} b_i(x) \frac{\delta f}{\delta x_i} \, ,$$

un opérateur elliptique dégénéré. Soit $P_t(x,A)$ la fonction de transition du processus de diffusion associé à $\overline{V}$ au moyen de l'équation stochastique de K. ITO, et soit $S_{t,x}$ le support de cette mesure. D'autre part, soit S_x l'ensemble de tous les points $y \in R^d$ qu'on peut lier à x par une suite finie de courbes, dont chacune est une trajectoire d'un champs de vecteurs correspondant à A_o, A_1, $-A_1, \ldots, A_r$, $-A_r$. Alors le théorème 3B entraîne que $S_{t,x} \subseteq S_x$. Pour plus de renseignements, voir notre article [13, chapitre 3.5] .

B I B L I O G R A P H I E

(1) E. CINLAR : "Markov additive processes" I, II, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 24 (1972), 85-93 et 24 (1972), 95-121.

(2) C. DOLEANS-DADE : "Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 16 (1970), 181-194.

(3) I.I. EZHOV and A.V. SKOROHOD : "Markov processes with homogeneous second component", Theory Probability Appl., 14 (1969), 1-13.

(4) M. FUKUSHIMA and M. HITSUDA : "On a class of Markov processes taking values on lines and the central limit theorem", Nagoya Math. J., 30 (1967), 47-56.

(5) R. GRIEGO and R. HERSH : "Theory of random evolutions with applications to partial differential equations", Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 405-418.

(6) R. HERSH and G. PAPANICOLAOU : "Non-commuting random evolutions and an operator-valued Feynman-Kac formula", Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), 337-367.

(7) R. KERTZ : "Limit theorems for discontinuous random evolutions", Ph. D. Thesis, Northwestern University, 1972.

(8) H. KUNITA and S. WATANABE : "On square integrable martingales", Nagoya Math. J., 30 (1967), 209-245.

(9) T.G. KURTZ : "A limit Theorem for Perturbed Operator Semigroups with Applications to Random Evolutions", to appear.

(10) P.A. MEYER : "Séminaire de Probabilités", vol. 1, (Université de Strasbourg, 1966-67), Lectures Notes in Math., vol. 39, Springer Verlag, Berlin, 1967.

(11) G. PAPANICOLAOU : "Some problems and Methods for the analysis of Stochastic equations", AMS Symposium on Stochastic Equations, New York, March 1972.

(12) M. PINSKY : "Stochastic integral representation of multiplicative operator functionals of a Markov process", Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), (89-105).

· (13) **M. PINSKY** : "Multiplicative Operator Functionals and Their Asymptotic Properties", Advances in Probability, vol. 3, Marcel Dekker, N.Y. 1973.

[14] D.W. STROOCK : "On certain systems of parabolic equations", Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 447-457.

[15] D.W. STROOCK and S.R.S. VARADHAN : "On the support of diffusion processes, with applications to the strong maximum principle", 6th Berkeley Symposium on Prob. and Stat., 1970.

[16] H. TANAKA : "Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path", Z. Warscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 1 (1963), 251-257.

[17] A.D. VENTCEL : "On continuous additive functionals of a multidimensional Wiener process", Dokl. Akad. Nauk. SSR 142 (1962), 1223-1226.

Université de Paris VI
75005 Paris
et
Northwestern University
Evanston, Illinois 60201
USA