Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Une mise au point sur les systèmes de Lévy. Remarques sur l'exposé de A. Benveniste

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 25-32
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__25_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE MISE AU POINT SUR LES SYSTEMES DE LEVY
REMARQUES SUR L'EXPOSE DE A.BENVENISTE*

P.A. Meyer

La théorie des systèmes de LEVY des processus de Markov, due à IKEDA, KUNITA, S.WATANABE, est devenue ces dernières années un outil fréquemment utilisé. Comme il est naturel, les premiers auteurs ne se sont pas préoccupé de généralité, et se sont placés dans le cas où " tout marche bien" : processus de HUNT avec hypothèse (L) de continuité absolue. Leurs travaux sont exposés dans le séminaire de Probabilités I [1], rédaction à laquelle renvoie le travail récent de A.BENVENISTE, qui se débarrasse de l'hypothèse (L), mais conserve l'hypothèse que le processus soit de HUNT. Par ailleurs, WALSH et WEIL ont développé une théorie du système de LEVY d'un processus de RAY, sous une double hypothèse : hypothèse (L), et existence d'une topologie cofine ([3]). Leur méthode est plus "probabiliste".

Ayant relu mes propres exposés [1], sur lesquels repose le travail de BENVENISTE, j'ai été pris de compassion pour le pauvre lecteur qui souhaiterait apprendre tout cela . Si l'on regarde de près cette théorie des systèmes de LEVY, en rejetant ce qui est inutile aux démonstrations principales, on s'aperçoit que le chemin est en réalité très simple. Par exemple, les intégrales stochastiques y jouent en réalité un très petit rôle, et aucun théorème de projection de fonctionnelles additives n'y est nécessaire : le théorème de projection simple, celui de la théorie des martingales, est amplement suffisant. De plus, on s'aperçoit qu'une partie de la théorie , celle qui concerne les sauts totalement inaccessibles, est valable sans aucune hypothèse spéciale : ni HUNT, ni RAY, ni (L), ni topologie cofine. Cela n'a pas une grande portée, mais il arrive maintenant que l'on travaille sur de " gros" processus, pour lesquels toute hypothèse un peu restrictive sera invérifiable.

Un premier coup d'œil à la théorie montre qu'il importe d'y distinguer deux parties :

a) Compensation des sauts : étant donné un processus de Markov (X_t) à valeurs dans E (lusinien métrisable), satisfaisant aux hypothèses droites, évaluer des espérances de sommes de sauts de la forme

* Voir NOTE très importante à la dernière page de cet exposé.

$$E^\bullet[\ \sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\ ]$$

b) Etudier la <u>structure des fonctionnelles additives purement discontinues</u> : les positives principalement, mais aussi celles qui sont des martingales de carré intégrable.
Je vais ici décrire le squelette de chacune des deux parties, en espérant ainsi guider le lecteur dans l'exposé de BENVENISTE.

PREMIERE PARTIE : COMPENSATION DES SAUTS

La partie de la théorie qui marche toujours concerne la compensation des sauts totalement inaccessibles du processus. Nous allons commencer par donner un sens précis à cette expression.

A. Soit $\bar{E}$ un compactifié de RAY-KNIGHT de E pour le processus (X_t).
Nous travaillerons sur une réalisation du processus qui est à la fois continue à droite dans E pour la topologie de E, continue à droite et pourvue de limites à gauche dans $\bar{E}$ pour la topologie du compactifié. Les limites à gauche pour la topologie initiale, qui n'existent pas nécessairement (mais qui sont dans E quand elles existent) sont notées X_{t-} ; les limites à gauche au sens de $\bar{E}$ seront notées $\bar{X}_{t-}$. Si f est une fonction sur E×E, l'expression $f(X_{t-},X_t)$ sera par convention prise égale à 0 si X_{t-} n'existe pas. Soit B l'ensemble des points de branchement. Rappelons quelques résultats de [2]

- Un temps d'arrêt T est totalement inaccessible pour la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ si et seulement si, P^μ-p.s. sur $\{T<\infty\}$, on a $\bar{X}_{T-}\neq X_T$ et $\bar{X}_{T-}\notin B$ ([2], th.7, a)).
- Si T est totalement inaccessible, X_{T-} existe P^μ-p.s., et est P^μ-p.s. égal à $\bar{X}_{T-}$ ([2], lemme 2 suivant le th.12).

Soit alors J l'ensemble des (t,ω) tels que

(1) $\quad t>0$, $X_{t-}(\omega)$ existe <u>dans E</u>, $X_{t-}(\omega)=\bar{X}_{t-}(\omega)\neq X_t(\omega)$

J ne dépend pas de la loi initiale μ, il est P^μ-indistinguable d'une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, et un temps d'arrêt T est totalement inaccessible si et seulement si son graphe passe dans J. On peut donc donner un sens parfaitement clair à la <u>sommation sur les sauts totalement inaccessibles</u> : c'est la sommation sur les s∈J . Cette remarque étant faite, nous ne nous servirons plus de la compactification de RAY.

La partie du théorème de KUNITA-WATANABE qui subsiste sans aucune hypothèse spéciale sur le processus est la suivante :

Il existe un noyau n *sur* E, *positif*, *transformant les fonctions boréliennes en fonctions presque-boréliennes*, *et une fonctionnelle additive continue* H, *tels que l'on ait* $n(x,\{x\})=0$ *et*

$$(2)\quad E^{\bullet}\Big[\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{s\in J\}}\Big] = E^{\bullet}\Big[\int_0^t dH_s \int n(X_{s-},dy)f(X_{s-},y)\Big]$$

En dehors des processus de HUNT, pour laquelle le premier membre est une sommation sur tous les sauts, cela ne paraît pas spécialement intéressant. Une exception toutefois, celle des processus *standard* : si $f(x,\partial)=0$ pour tout x, la somme du premier membre porte sur tous les sauts $s<\zeta$.

Voici le schéma de la démonstration. On commence par des résultats élémentaires sur les martingales de carré intégrable.

B. Soit $\underline{\underline{M}}$ l'espace des fonctionnelles additives (M_t) telles que $E[M_t^2] < \infty$, $E^{\bullet}[M_t]=0$. L'existence d'une version de $<M,M>$ qui soit une fonctionnelle additive n'exige aucune hypothèse spéciale pour le processus. De même, l'existence d'une suite de fonctions presque boréliennes bornées g_n sur E , appartenant au domaine du générateur infinitésimal A du semi-groupe (et les Ag_n étant bornées) telle que

pour toute loi P^{μ}, *toute martingale de carré intégrable* (et non seulement f. add.) *orthogonale aux martingales*

$$(3)\quad C^n = g_n\circ X_t - g_n\circ X_0 - \int_0^t Ag_n\circ X_s\, ds$$

et nulle pour $t=0$, *est identiquement nulle*.

Soit D^n la suite obtenue en orthogonalisant (pour P^{μ}) la suite C^n. Toute martingale M pour P^{μ}, de carré intégrable, se développe en intégrales stochastiques par rapport aux D^n , donc $<M,M>$ est absolument continue par rapport à l'ensemble des $<D^n,D^n>$, donc par rapport à l'ensemble des $<C^n,C^n>$. Choisissons des constantes $\lambda_n > 0$ telles que $E^{\bullet}[\sum_n \lambda_n <C^n,C^n>_1]$ soit bornée, et posons

$$K_t = \sum \lambda_n <C^n,C^n>_t$$

alors tous les processus croissants $<M,M>$ sont absolument continus par rapport à K. La fonctionnelle H du théorème sera la partie continue de K.

C. Appelons *fonctionnelle du type de Poisson* une fonctionnelle additive p, positive, telle que $E^{\bullet}[p_t] < \infty$ pour tout t, purement discontinue, à sauts unité et *à sauts totalement inaccessibles* .

On lui associe sa <u>compensatrice</u> $\tilde{p}$, fonctionnelle additive continue, telle que $E^{\bullet}[p_t]=E^{\bullet}[\tilde{p}_t]$ pour tout t. On pose $\overset{c}{p} = p-\tilde{p}$, la <u>compensée</u> de p. Alors $\overset{c}{p}$ appartient à $\underline{\underline{M}}$, et $<\overset{c}{p},\overset{c}{p}>=\tilde{p}$. <u>Donc</u> $\tilde{p}$ <u>est absolument continue par rapport à</u> H . C'est uniquement pour établir ce résultat crucial que l'on utilise la théorie des martingales de carré intégrable.

D. Puisque $\tilde{p}$ est absolument continue par rapport à H continue, il existe une fonction positive f telle que $\tilde{p}_t = \int_0^t f\circ X_s dH_s = \int_0^t f\circ X_{s-} dH_s$. C'est là qu'intervenait l'hypothèse (L) dans les démonstrations de KUNITA-WATANABE, et que BENVENISTE la fait disparaître. On se ramène par changement de temps au théorème suivant, dû à MOKOBODZKI

si Uh est un potentiel borné de fonction positive, si φ est une fonction excessive majorée au sens fort par Uh, alors φ est un potentiel Ug , où $g= \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda(\varphi-\lambda U_\lambda \varphi)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les fonctions excessives.

La fonction φ est donc presque-borélienne. Comme deux processus qui se déduisent l'un de l'autre par changement de temps ont les mêmes fonctions presque-boréliennes, on voit que f peut être prise <u>presque-borélienne</u> : c'est un peu mieux que ce qu'annonce BENVENISTE, qui la prend seulement universellement mesurable.

E. La fin de la démonstration est triviale du point de vue des idées, et ennuyeuse du point de vue technique : il s'agit de choisir des ensembles Δ_n dans E×E, contenant la diagonale, et tels que $\Delta_n \downarrow \Delta$, et que pour presque tout ω l'ensemble

$$J_n(\omega)=\{t\in J(\omega) : (X_{t-}(\omega),X_t(\omega))\in\Delta_n\}$$

soit dépourvu de points d'accumulation dans $\mathbb{R}_+$. Cela se fait en prenant $\Delta_n=\{(x,y) : \bar{d}(x,y)> \frac{1}{n}\}$, où $\bar{d}$ est une distance sur $\bar{E}$. Après quoi, on construit des $A_m \uparrow E$ tels que la fonctionnelle

$$p_t^K = \sum_{s\leq t} I_{\{s\in J_n\}} I_{A_m\cap K}\circ X_s$$

soit du type de Poisson pour tout $K\subset E$. On forme $\tilde{p}^K$, on note f^K la densité de $\tilde{p}^K$ par rapport à (H_t), on régularise l'application $K\mapsto f^K$ en un noyau N_{nm} sur E, qui transforme les fonctions boréliennes en fonctions presque-boréliennes. Pour finir, on fait tendre n et m vers $+\infty$, et l'on obtient le noyau de LEVY n cherché.

REMARQUE. La méthode de WALSH et WEIL consiste à utiliser les théorèmes de structure de la seconde partie pour traiter la première. C'est excellent en un certain sens, car leur démonstration des théorèmes de structure est très probabiliste. Malheureusement, l'hypothèse (L) intervient dans la seconde partie aussi, et on ne peut l'en chasser (dans l'état actuel des choses) que par les limites médiales . La démonstration de BENVENISTE a l'avantage de rendre la première partie indépendante de l'emploi des limites médiales.

EXTENSION DE LA PREMIERE PARTIE AUX PROCESSUS DE RAY

Nous supposons ici que la topologie de E est induite par celle de $\overline{E}$, de sorte que les limites à gauche X_{s-} et $\overline{X}_{s-}$ coincident lorsque les premières sont dans E. Nous écrivons donc simplement X_{s-} pour toutes deux, et nous voulons calculer les sommes

$$E^{\bullet}[\sum_{s\leqq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}]$$

f étant une fonction sur $(E\cup B)\times E$. Lorsque f est nulle sur $B\times E$, la somme est déjà calculée. Il suffit donc de traiter le cas où f est nulle sur $E\times E$. Nous remarquons alors (d'après WALSH et WEIL) que nous connaissons déjà un système de LEVY pour une telle fonction, dont le noyau de LEVY est P_0 .

En effet, considérons la " fonctionnelle additive formelle" (prévisible)

$$L_t = \sum_{s\leqq t} I_{\{X_{s-}\in B\}}$$

L_t est en général $+\infty$ identiquement, mais la mesure aléatoire $dL_t = \sum_s I_{\{X_{s-}\in B\}}\varepsilon_s$ est parfaitement bien définie, et c'est elle qui intervient dans les calculs. Nous avons alors, si f=0 sur $E\times E$

$$E^{\bullet}[\sum_{s\leqq t} f(X_{s-},X_s)] = E^{\bullet}[\int_0^t dL_s \int_B P_0(X_{s-},dy)f(X_{s-},y)]$$

Il suffit pour le voir de représenter l'ensemble $\{(t,\omega):X_{t-}(\omega)\in B \}$ comme une réunion de graphes disjoints de temps d'arrêt prévisibles, et d'appliquer le th.4 de [1].

Soit f une fonction p-surmédiane continue ; nous avons pour $x\in E$

$$f(x) \geqq E^x[\sum_s e^{-ps}(f(X_{s-})-P_0(X_{s-},f))I_{\{X_{s-}\in B\}}]$$

Soit h la fonction $f-P_0f$; on voit que la fonction $E^{\bullet}[\int e^{-ps}h(X_{s-})dL_s]$ est bornée sur E, donc sur $\overline{E}$. Par conséquent, la fonction

$E^{\bullet}[\int_0^t h(X_{s-})dL_s]$ est bornée sur $\bar{E}$. Choisissons une suite (f_n) de fonctions p_n-surmédianes continues, totale dans $\underline{\underline{C}}(\bar{E})$, de sorte que $B=\cup\{f_n-P_0f_n>0\}$, et soit

$$\lambda = \sum a_n(f_n-P_0f_n)$$
$$L'_t = \sum_{s\leq t} \lambda\circ X_{s-}$$

les constantes $a_n>0$ étant choisies de telle sorte que la fonction $E^{\bullet}[L'_1]$ soit bornée sur $\bar{E}$: L' est une <u>vraie</u> fonctionnelle additive, et les mesures aléatoires dL et dL' sont équivalentes.

Posons maintenant

$$\bar{H}_t = H_t+L'_t$$
$$\bar{n}(x,dy) = n(x,dy) \text{ si } x\in E$$
$$\lambda^{-1}(x)P_0(x,dy) \text{ si } x\in B$$

$\bar{H}$ est une fonctionnelle additive prévisible, et nous avons pour toute f positive sur $(E\cup B)\times E$, nulle sur la diagonale de $E\times E$

$$E^{\bullet}[\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)] = E^{\bullet}[\int_0^t d\bar{H}_s \int_{E\cup B} \bar{n}(X_{s-},dy)f(X_{s-},y)]$$

Autrement dit, un système de LEVY complet sans hypothèse (L).

SECONDE PARTIE : STRUCTURE DES FONCTIONNELLES DISCONTINUES

A. Soit Λ^2 l'espace des fonctions universellement mesurables f sur $E\times E$, nulles sur la diagonale, et telles que pour tout x et tout t la quantité

$$\|f\|_{x,t} = (E^x[\sum_{s\leq t} f^2(X_{s-},X_s)I_{\{s\in J\}})^{1/2}$$

soit finie. On définit ainsi une famille de semi-normes sur Λ^2, et Λ^2, muni de ces semi-normes apparaît, après séparation, comme l'espace $L^2(\mu_i)$ d'une famille - non dénombrable - de mesures σ-finies. Il résulte du procédé des limites médiales de MOKOBODZKI que toute <u>suite</u> de Cauchy (f_n) converge vers un $f\in L^2$ (les f_n ne sont pas bornées : les tronquer à K, ce qui préserve la convergence , puis faire tendre K vers $+\infty$).

B. Soit $f\in\Lambda^2$; alors la fonctionnelle

$$S_f^{\varepsilon} = \sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{|f(X_{s-},X_s)|>\varepsilon \;,\; s\in J\}}$$

admet une compensatrice continue $\tilde{S}_f^{\varepsilon}$, et une compensée $S_f^{\varepsilon}-\tilde{S}_f^{\varepsilon}$ qui appartient à $\underline{\underline{M}}$. Lorsque $\varepsilon\to 0$, cette compensée converge dans $\underline{\underline{M}}$ vers une fonctionnelle qu'on note $\overset{c}{S}f$. Pour toute mesure P^x, c'est une martingale de carré intégrable, somme compensée de sauts totalement inaccessibles.

C. Toute martingale de carré intégrable se décompose de manière unique en une partie continue, une somme compensée de sauts totalement inaccessibles, une somme compensée de sauts accessibles, et ces trois termes sont orthogonaux.

Considérons en particulier les martingales C^n de la formule (3). Soit S^n la somme compensée des sauts totalement inaccessibles de C^n: on a $S^n = \overset{c}{S}\gamma_n$, où $\gamma_n(x,y)=g_n(x)-g_n(y)$ [c'est très facile à voir, bien que la présentation dans [1] soit très obscure]. Soit maintenant T^n la suite construite par récurrence en orthogonalisant la suite S^n. Par exemple $T_t^1=S_t^1$, $T_t^2=S_t^2 - \int_0^t f\circ X_{s-}dS_s^1$, où f est la densité de la fonctionnelle continue $<S^1,S^2>$ par rapport à $<S^1,S^1>$: on vérifie que $T^1 = \overset{c}{S}\alpha_1$, avec $\alpha_1=\gamma_1$, puis $T^2=\overset{c}{S}\alpha_2$, avec $\alpha_2(x,y)= f(x)\gamma_2(x,y)$, et le raisonnement d'orthogonalisation se poursuit bien, chaque T^n étant de la forme $\overset{c}{S}\alpha_n$.

Soit maintenant $M\in\underline{\underline{M}}$, qui soit une somme compensée de sauts totalement inaccessibles. Soit f_n une densité de la fonctionnelle continue $<M,T^n>$ par rapport à $<T^n,T^n>$. La série $\sum \int f_n\circ X_{s-}dT_s^n$ converge dans $\underline{\underline{M}}$ vers une fonctionnelle N. M-N est une somme compensée de sauts totalement inaccessibles. Elle est orthogonale à tous les T^n, donc à tous les S^n, donc à tous les C^n, donc nulle.

Mais $\sum_1^K \int f_n\circ X_{s-}dT_s^n$, pour tout K fini, est de la forme $\overset{c}{S}f_n$, avec $f_n\in\Lambda^2$: les f_n forment une suite de Cauchy dans Λ^2, qui converge vers $f\in\Lambda^2$. D'où l'on tire que $M=\overset{c}{S}f$.

C. On en déduit que toute fonctionnelle additive positive (A_t) purement discontinue, à sauts totalement inaccessibles, est de la forme $\sum_{\underline{\underline{s\leq t}}} f(X_{s-},X_s)I_{\{s\in J\}}$, avec f universellement mes. positive, nulle sur la diagonale. Cela, sans aucune hypothèse spéciale sur le processus. Encore une fois, ce n'est pas un résultat de grande portée, mais il peut être utile pour les processus standard, par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Intégrales stochastiques 3,4. Exposés du séminaire de Probabilités I. Lecture Notes in M. n°39, Springer 1967

[2] WALSH (J.B) et MEYER (P.A.). Quelques applications des résolvantes de RAY. Invent.Math. 14, 1971, p. 143-166.

[3] WALSH (J.B) et WEIL (M.). Représentation de temps terminaux Applications aux systèmes de LEVY. Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 5, 1972, p.121-155.

NOTE (Déc. 1972)

Un travail tout récent de A.BENVENISTE et J.JACOD vient, semble t'il , de fournir la présentation définitive des systèmes de LEVY. La méthode de BENVENISTE et JACOD est extrêmement simple, et n'utilise ni les intégrales stochastiques, ni les limites médiales, mais pour l'instant elle n'est rédigée que pour les processus de HUNT . Tout le monde souhaite qu'ils préparent une nouvelle rédaction qui puisse devenir le texte de référence sur cette question .