Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer
Mohammed Traki

Réduites et jeux de hasard

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 155-171
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__155_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

REDUITES ET JEUX DE HASARD

exposé de P.A.Meyer, avec M.Traki

La théorie générale des jeux de hasard a été exposée par DUBINS et SAVAGE dans leur livre bien connu " How To Gamble If You Must " [3] - bien connu du moins par son titre, car ce n'est pas un livre facile. En 1966, un étudiant de Strasbourg, M. Mohammed TRAKI , avait entrepris de présenter les résultats de DUBINS et SAVAGE comme travail de 3e Cycle. Il s'agissait en particulier de débarrasser le livre de sa théorie de la mesure 'non classique". Le travail de M.TRAKI, poursuivi dans des conditions difficiles, a été achevé en 1971. Entre temps, la mise au point que nous avions préparée ensemble en 1966 s'est trouvée largement dépassée par les progrès de la théorie, en particulier par les travaux de STRAUCH et SUDDERTH.

Du point de vue de la théorie des jeux de hasard, les généralités constituent un mal nécessaire, les résultats vraiment intéressants concernant l'existence de stratégies optimales (et leur détermination explicite !). Les résultats généraux, en revanche, ont beaucoup d'intérêt pour la théorie du potentiel : ils constituent en effet une première ébauche d'une théorie des réduites relativement à une famille de noyaux qui n'est pas un semi-groupe . C'est pourquoi ils sont exposés ici d'une manière autonome.

Bien que cet exposé ait été récrit, il doit encore beaucoup aux discussions avec M.TRAKI. Il est juste qu'il en soit remercié ici.

1. LES DEFINITIONS PRINCIPALES

I. On se donne un espace d'états E polonais (métrique séparable complet). On désigne par $\underline{\underline{E}}$ sa tribu borélienne, par $\underline{\underline{P}}$ l'ensemble des lois de probabilité sur E, par $\underline{\underline{M}}^+$ le cône des mesures positives bornées sur E.

On remarquera plus loin que la topologie de E n'intervient jamais, mais seulement sa structure mesurable : on sait que les espaces mesurables $(E,\underline{\underline{E}})$ sousjacents à une topologie polonaise forment une classe que l'on rencontre très fréquemment. Ce qui suit s'étend d'ailleurs à la classe un peu plus large des espaces de BLACKWELL ([1], [4]).

De même, $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{M}}^+$ sont munis d'une métrique naturelle associée à la métrique d de E, qui en fait des espaces polonais, et qui définit la topologie de la convergence étroite des mesures : c'est la distance de PROKHOROV ([6], [ ]). Si l'on change la métrique d (E restant complet séparable), la distance de PROKHOROV change aussi, mais la structure mesurable qu'elle définit reste la même sur $\underline{\underline{P}}$ ou $\underline{\underline{M}}^+$.

Du point de vue de la théorie des jeux de hasard, il est suggestif d'appeler <u>fortunes</u> les points de E, et <u>jeux</u> les mesures de probabilité sur E. Un joueur qui dispose de la fortune x ne peut en général pas jouer à n'importe quel jeu : il choisit dans un certain ensemble J(x), l'ensemble des <u>jeux permis</u> en x. Nous supposerons toujours que $\varepsilon_x \in J(x)$: le joueur a le droit de conserver sa fortune intacte, sans rien jouer. Ainsi, nous posons la définition suivante :

DEFINITION. On appelle <u>maison de jeu</u> (gambling house) une partie J de $E\times\underline{\underline{P}}$ possédant les propriétés

1) $\varepsilon_x \in J(x)$ pour tout $x\in E$ ("the g.h. is leavable")
2) J est mesurable pour la tribu produit naturelle sur $E\times\underline{\underline{P}}$.

En fait, DUBINS et SAVAGE ne font aucune de ces deux hypothèses : l'hypothèse 1) est trop restrictive pour la théorie des jeux de hasard (mais non pour ses applications mathématiques). Quant à l'hypothèse 2), ils l'évitent en utilisant une théorie de la mesure non orthodoxe (simplement additive) : cela présente bien des inconvénients pour les applications éventuelles à la théorie du potentiel.

II. Une <u>stratégie</u> est une règle que se fixe à l'avance le joueur, et qui détermine ses choix successifs. En termes mathématiques, c'est une suite $\sigma=(s_n)_{n>0}$ d'applications mesurables

$$s_1 : E \to \underline{\underline{P}} \quad , \quad s_2 : E\times E \to \underline{\underline{P}} \ , \ \dots \ , \ s_n : E^n \to \underline{\underline{P}}$$

telle que <u>quels que soient</u> $n, x_0, \dots, x_n$, <u>la mesure</u> $s_{n+1}(x_0, \dots, x_n \, ; dy)$ <u>appartienne à</u> $J(x_n)$. Autrement dit, si le joueur est passé par les fortunes successives $x_0, \dots, x_n$ aux instants $0, \dots, n$

il choisi à l'instant n+1 le jeu $s_{n+1}(x_0,\dots,x_n\ ;\ dy)$, qui doit naturellement être permis pour la dernière fortune x_n .

Lorsqu'une stratégie σ a été choisie, et lorsque la loi μ de la fortune initiale est connue, on peut représenter l'évolution de la fortune du joueur par un processus stochastique. Notons Ω l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu produit naturelle $\underline{\underline{F}}$. Les éléments de Ω sont parfois appelés <u>parties</u> (infinies). On note X_n l'application coordonnée d'indice n, et $\underline{\underline{F}}_n$ la tribu engendrée par $X_0,\dots,X_n$. <u>Il existe alors une loi</u> $P_{\mu,\sigma}$ <u>sur</u> Ω <u>et une seule telle que</u>

$$P_{\mu,\sigma}\{X_0 \in A\} = \mu(A) \qquad (A\in\underline{\underline{E}})$$

$$P_{\mu,\sigma}\{X_{n+1}\in A|\underline{\underline{F}}_n\} = s_{n+1}(X_0,\dots,X_n\ ;\ A)\ (A\in\underline{\underline{E}}\ ,\ n\geqq 0\ )$$

Nous désignerons par $E_{\mu,\sigma}$ l'espérance correspondante. Nous n'insistons pas sur la construction de $P_{\mu,\sigma}$, d'abord, par récurrence, sur $\underline{\underline{F}}_n$, puis passage à $\underline{\underline{F}}$ par un argument de limite projective justifié (par exemple) par le caractère polonais de E.

On rencontre fréquemment des stratégies (dites <u>markoviennes</u>) pour lesquelles le choix du jeu à l'instant n+1 ne dépend que de la dernière fortune obtenue x_n. Ces stratégies sont de la forme

$$s_{n+1}(x_0,\ \dots\ ,\ x_n\ ;\ dy\ ) = r_{n+1}(x_n\ ,\ dy\ )$$

où pour tout $n>0$ r_n est un <u>noyau permis</u> , i.e. un noyau sur E tel que $r_n(x,dy)\in J(x)$ pour tout $x\in E$. Un cas particulier spécialement important est celui où tous les r_n sont égaux à un même noyau permis r : la stratégie correspondante est alors dite <u>markovienne stationnaire</u> , et notée [r].

III. On se donne sur E une fonction borélienne positive u , appelée l'<u>utilité</u> (nous supposerons en général que u est bornée) Intuitivement, le joueur est d'autant plus content dans l'état x que u(x) est plus grand, et il cherche à choisir des stratégies qui le conduisent dans des états où l'utilité est grande.

Nous poserons $\overline{u}(\mu,\sigma) = \sup_T E_{\mu,\sigma}[u\circ X_T,\ T<\infty\ ]$, T parcourant l'ensemble de tous les temps d'arrêt. Ce nombre peut être appelé l'utilité de la stratégie σ . Nous poserons

$$\overline{u}(\mu) = \sup_\sigma \overline{u}(\mu,\sigma)$$

et en particulier si $\mu=\varepsilon_x$ nous écrirons $\bar{u}(x)$. S'il existe une stratégie σ telle que $\bar{u}(\mu,\sigma)=\bar{u}(\mu)$, nous dirons que σ est <u>optimale</u> (pour la loi initiale μ) : il n'y a aucune raison pour qu'une telle stratégie existe, et elle n'est"jamais"unique (on peut y intercaler autant d'arrêts qu'on veut).

Les définitions sont achevées. Il n'est absolument pas évident que $\bar{u}$ soit mesurable, et on n'en connaît aucune propriété. Nous allons montrer dans les paragraphes qui suivent

1) que $\bar{u}$ est effectivement mesurable, et que $\bar{u}(\mu)=\int \bar{u}d\mu$,

2) qu'il existe des stratégies markoviennes presque optimales (théorème de STRAUCH),

3) qu'il existe des stratégies markoviennes <u>stationnaires</u> presque optimales (théorème de SUDDERTH). Nous en donnerons deux versions , dont la seconde est à mon avis un théorème profond, qui mériterait d'être beaucoup plus connu.

2. MESURABILITE DE $\bar{u}$

DEFINITION. <u>Si</u> v <u>est universellement mesurable positive</u>, <u>on note</u> Jv <u>la fonction</u> $x \longmapsto \sup_{j\in J(x)} < j,v >$ ($<j,v> = \int v(y)j(dy)$)

Comme $\varepsilon_x \in J(x)$ pour tout x, on a $Jv \geqq v$. Il n'est pas évident que Jv soit elle même universellement mesurable, mais nous allons distinguer une classe de fonctions suffisamment riche, et stable par l'opération J. A vrai dire, cette partie de l'exposé est elle aussi démodée : MOKOBODZKI a des résultats bien plus puissants sur les noyaux capacitaires [5] qui contiennent tous ceux-ci . Mais ce qui suit exige un moins grand investissement intellectuel ...

DEFINITION. <u>Une fonction positive</u> v <u>sur un espace polonais</u> F <u>appartient à la classe</u> (S) <u>si</u>

<u>pour tout</u> $a\in\mathbb{R}_+$ <u>l'ensemble</u> $\{v>a\}$ <u>est souslinien dans</u> F .

Les ensembles sousliniens (ou analytiques) dans un espace polonais sont définis dans BOURBAKI [2] : nous rappellerons sommairement les propriétés des ensembles sousliniens que nous utiliserons. Rappelons d'abord que tout ensemble borélien est souslinien, de sorte qu'une fonction borélienne positive appartient à la classe (S). D'autre part un ensemble souslinien (donc une fonction de la classe (S)) est universellement mesurable.

LEMME 1.-1) <u>La limite</u> v <u>d'une suite croissante</u> (<u>ou décroissante</u>) <u>de fonctions</u> $v_n \in (S)$ <u>appartient encore à la classe</u> (S).

2) <u>La classe</u> (S) <u>est stable pour les sommes</u>, <u>les produits et les opérations</u> $\vee$ <u>et</u> $\wedge$.

3) <u>Si</u> v <u>appartient à la classe</u> (S) <u>sur</u> F, <u>l'application</u> $\mu \mapsto \int f d\mu$ <u>sur</u> $\underline{\underline{M}}^+(F)$ <u>appartient à la classe</u> (S).

DEMONSTRATION. 1) Si $v_n \uparrow v$, on a $\{v>a\} = \bigcup_n \{v_n>a\}$, et une réunion dénombrable d'ensembles sousliniens est souslinienne. De même pour les suites décroissantes : on remarque que $v \in (S)$ si et seulement si $\{v \geq a\}$ est souslinien pour tout a, et on utilise le fait qu'une intersection dénombrable d'ensembles sousliniens est souslinienne.

2) Nous avons par exemple

$$\{v_1+v_2 > a\} = \bigcup_{\substack{r \text{ rationnel} \\ s \text{ rationnel} \\ r+s > a}} \{v_1>r\} \cap \{v_2>s\}$$

3) La fonction v est limite croissante, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, des fonctions $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon I_{\{v>m\varepsilon\}}$. D'après 2), il suffit de vérifier que la fonction $\mu \mapsto \mu(A)$ sur $\underline{\underline{M}}^+(F)$ appartient à la classe (S) pour tout ensemble souslinien A dans F. Par définition des ensembles sousliniens, il existe un espace polonais P, une application continue φ de P dans F telle que $\varphi(P)=A$. On peut montrer que l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ de $\underline{\underline{M}}^+(P)$ dans $\underline{\underline{M}}^+(F)$ (mesure image par φ) applique $\underline{\underline{M}}^+(P)$, continûment pour la topologie de la convergence étroite, sur l'ensemble des mesures sur F portées par A (pour tout cela, voir BOURBAKI Intégr. chap.IX, §5, n^{os} 3 et 4). Comme cette application préserve la masse totale, elle applique l'ensemble $\underline{\underline{M}}_a(P)$ des mesures sur P de masse >a sur l'ensemble $\underline{\underline{M}}_a(A)$ des mesures sur F portées par A, de masse >a . Or $\underline{\underline{M}}_a(P)$, ouvert dans $\underline{\underline{M}}^+(P)$ polonais, est lui-même polonais, donc $\underline{\underline{M}}_a(A)$ est souslinien dans $\underline{\underline{M}}^+(F)$. Enfin, $\{ \mu \in \underline{\underline{M}}^+(F) : \mu(A)>a\} = \underline{\underline{M}}_a(A)+\underline{\underline{M}}^+(F)$ est image continue de $\underline{\underline{M}}_a(A)\times\underline{\underline{M}}^+(F)$, qui est un produit d'ensembles sousliniens, donc souslinien. L'ensemble $\{ \mu : \mu(A)>a\}$ est donc souslinien, et nous avons montré que $\mu \mapsto \mu(A)$ appartient à la classe (S).

COROLLAIRE.- Si v appartient à la classe (S) sur E, il en est de même de Jv.

DEMONSTRATION. L'ensemble $\{Jv>a\}$ est la projection sur E de l'ensemble $\{(x,\mu)\in J : <\mu,v> > a\}$ contenu dans $E\times\underline{\underline{P}}$. Comme J est borélien - donc souslinien - dans $E\times\underline{\underline{P}}$, le lemme 1 entraîne que l'ensemble précédent, égal à $J\cap(E\times\{\mu : <\mu,v> > a\})$, est souslinien. Sa projection l'est alors aussi, et Jv appartient bien à la classe (S).

LEMME 2. Soit μ une loi sur E, et soit v une fonction de la classe (S). Il existe pour tout $\varepsilon>0$ un noyau permis r tel que l'on ait pour μ-presque tout x

$$\begin{aligned}\int r(x,dy)v(y) &\geq Jv(x)-\varepsilon \quad \text{si } Jv(x)<\infty\\ &\geq 1/\varepsilon \quad \text{si } Jv(x)=+\infty\end{aligned}$$

DEMONSTRATION. La fonction $Jv\in(S)$ est universellement mesurable. Choisissons une fonction borélienne $w\leq Jv$, telle que $w=Jv$ μ-p.p.. Convenons que $w-\varepsilon$ vaut $1/\varepsilon$ aux points où $w(x)=+\infty$ (!). Posons

$$H = \{ (x,j)\in J \ : < j,v> > w(x)-\varepsilon \}$$

Cet ensemble est souslinien : pour le voir, on notera que $j\mapsto\int v\,dj$ appartient à la classe (S) sur $\underline{\underline{P}}$, et on approchera w par des fonctions boréliennes étagées $w_n<w$. La coupe $H(x)$ est non vide pour tout x, par définition de Jv.

Nous appliquons maintenant un théorème de section mesurable : il existe une fonction borélienne $r : E\longmapsto\underline{\underline{P}}$ définie μ-p.p., telle que $(x,r(x))\in H$ en tout point où r est définie. Voir par exemple DELLACHERIE [9]. Si r n'est pas définie en x, nous la complèterons par ε_x, de manière à avoir une fonction partout définie. Le noyau r possède alors les propriétés indiquées.

Voici les théorèmes de STRAUCH. Nous introduisons les notations $J^1=J$ et, si v appartient à la classe (D), $J^{n+1}v=J(J^nv)$. Ces fonctions croissent, et nous désignons par $J^\infty v$ leur limite. D'autre part, nous poserons la définition suivante :

DEFINITION. Une fonction universellement mesurable positive v sur E est dite J-surmédiane si $Jv\leq v$.

Autrement dit, si $Jv=v$, ou si pour tout $j\in J(x)$ on a $<j,v>\leq v(x)$.

THEOREME 1 . $J^{\infty}u$ <u>est la plus petite fonction</u> J-<u>surmédiane majorant</u> u. <u>Pour toute loi</u> μ, <u>on a</u> $\overline{u}(\mu)=<\mu,J^{\infty}u>$, <u>et en particulier</u> $\overline{u} = J^{\infty}u$.

Ainsi , $\overline{u}$ est interprétée comme une <u>réduite au dessus de</u> u. La démonstration du théorème 1 nous montrera aussi que, pour atteindre le sup $\overline{u}(\mu)$ - sup pris sur toutes les stratégies et tous les temps d'arrêt - on peut se borner aux stratégies markoviennes et aux temps d'arrêt constants.

DEMONSTRATION. Si v est J-surmédiane et majore u, on a $Ju \leqq Jv=v$, puis $J^n u \leqq v$, enfin $J^{\infty}u \leqq v$. Inversement, il est évident que $J^{\infty}u$ est J-surmédiane et majore u .

Si v est J-surmédiane et majore u, on a pour toute stratégie σ et tout temps d'arrêt T

$$E_{x,\sigma}[u\circ X_T ,T<\infty] \leqq E_{x,\sigma}[v\circ X_T ,T<\infty] \leqq v(x)$$

C'est une conséquence simple de la définition de $P_{x,\sigma} = P_{\varepsilon_x,\sigma}$ et du théorème d'arrêt de DOOB , le processus $v\circ X_n$ étant une surmartingale positive. On a donc $\overline{u} \leqq v$, et de même $\overline{u}(\mu) \leqq <\mu,v>$. En particulier, $\overline{u} \leqq J^{\infty}u$, et de même pour $\overline{u}(\mu)$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, il suffira de raisonner en supposant u bornée (poser $u_k=u\wedge k$, remarquer que $J^{\infty}u= \sup_k J^{\infty}u_k$, et que $\overline{u} \geqq \overline{u}_k$). Alors $J^{\infty}u$ est aussi bornée. Utilisant le lemme 2, construisons des noyaux permis $r_1,\dots,r_n$ tels que

$$\begin{array}{lll} r_1 J^{n-1}u \geqq J^n u - \varepsilon/n & & \mu\text{-p.p.} \\ r_2 J^{n-2}u \geqq J^{n-1}u - \varepsilon/n & & \mu r_1\text{-p.p.} \\ \dots\dots & & \\ r_{n-1}Ju \geqq J^2 u - \varepsilon/n & & \mu r_1\dots r_{n-2}\text{-p.p.} \\ r_n u \geqq Ju - \varepsilon/n & & \mu r_1\dots r_{n-1}\text{-p.p.} \end{array}$$

Alors $r_1 r_2 \dots r_n u \geqq r_1 r_2 \dots r_{n-1}Ju-\varepsilon/n \geqq \dots \geqq J^n u-\varepsilon/$. μ.pp Définissons une stratégie markovienne σ au moyen des noyaux $r_1,\dots,r_n$, et r_k= Identité pour k>n . Nous avons alors

$$E_{\mu,\sigma}[u\circ X_n] \geqq < \mu,J^n u > - \varepsilon$$

Le premier membre est inférieur à $\overline{u}(\mu)$, et le théorème est établi.

REMARQUE. Il est amusant de regarder ce que donne tout cela dans le cas classique, où l'on se donne un noyau markovien P, et $J(x)=\{\varepsilon_x P, \varepsilon_x\}$ pour tout x . Dans ce cas, $Ju= u\vee Pu$, et l'expression $\overline{u} = J^{\infty}u = \lim_n J^n u$ est l'une des constructions récurrentes de la réduite que l'on utilise fréquemment. Mais il y en a une autre. Soit A l'ensemble $\{\overline{u}=u\}$, et soit A' son complémentaire ; notons J_A ,$J_{A'}$ les noyaux de multiplication par les indicatrices de A et A' respectivement, et introduisons le noyau markovien $r = J_A+J_{A'}P$. Il est bien connu[1] que $\overline{u} =H_A\overline{u} = H_A u$, où H_A est le noyau

$$H_A = J_A+\sum_1^{\infty} (J_{A'}P)^n J_A$$

Mais on a $r^n \geqq J_A + \sum_1^n (J_{A'}P)J_A$ (calcul immédiat), donc $\liminf_n r^n u \geqq H_A u = \overline{u}$, tandis que $\limsup_n r^n u \leqq \limsup_n r^n\overline{u} \leqq \overline{u}$. Ainsi, on a aussi $\overline{u} = \lim_n r^n u$.

Cela peut être interprété en terme de stratégie optimale : la stratégie [r] qui consiste à jouer (i.e. à choisir le jeu non trivial $\varepsilon_x P$) tant qu'on n'est pas dans A, et à s'arrêter dès qu'on y est entré, est une stratégie markovienne stationnaire optimale. On va se servir de ce résultat au paragraphe suivant . Noter qu'on a même $\overline{u}(x)=\lim_n E_{x,[r]}[u\circ X_n]$ sans utilisation de temps d'arrêt.

3. STRATEGIES MARKOVIENNES STATIONNAIRES

Voici le premier théorème de SUDDERTH. On suppose u <u>bornée</u>.

THEOREME 2. <u>Pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$, <u>tout</u> $\varepsilon>0$, <u>toute loi initiale</u> μ, <u>il existe un noyau permis</u> r <u>tel que l'on ait</u> μ-<u>presque partout</u>

$$\overline{u}(x,[r]) \geqq J^n u(x) - \varepsilon$$

On rappelle que [r] est la stratégie markovienne stationnaire associée à r. En intégrant par rapport à μ, et en remarquant que $< \mu,J^n u >$ tend vers $<\mu,J^{\infty} u> = \overline{u}(\mu)$, il vient

COROLLAIRE. <u>Il existe</u> r <u>tel que</u> $\overline{u}(\mu,[r]) \geqq \overline{u}(\mu)-\varepsilon$.

Avant la démonstration nous ferons une remarque : soient $r_1,r_2,\dots,r_n$ les noyaux permis construits au théorème 1 , et soit $r_0=Id$. Soit J^* la maison de jeu

$$J^*(x) = \{ \varepsilon_x r_0, \varepsilon_x r_1,\dots,\varepsilon_x r_n \}$$

(1) Non, ce n'est vrai que si u est majorée par un potentiel. cf. Appendice.

Le théorème 1 nous dit alors que $J^{*n}u \geqq J^n u - \varepsilon$ μ-p.p. Quitte à faire cela pour $\varepsilon/2$ au lieu de ε, nous voyons qu'il suffit de démontrer le théorème 2 lorsque la maison de jeu J est réunion d'un nombre fini de graphes de noyaux permis. On construit aisément, de la même manière, une maison de jeu J' contenue dans J, réunion d'une infinité dénombrable de graphes de noyaux permis, et telle que $J'^{\infty} u = J^{\infty} u$ μ-p.p. : cela sera utilisé pour la démonstration du théorème 3. C'est le seul point où l'on utilise le théorème 1 dans la démonstration des théorèmes 2 et 3.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2. La maison de jeu J étant supposée réunion finie de graphes, la fonction Ju est borélienne pour toute u borélienne, et aucun théorème de capacité n'est nécessaire pour établir le lemme 2 , qui est vrai sans aucun ensemble exceptionnel μ-négligeable. Posons $\alpha=\varepsilon/2n$ et construisons des noyaux $r_1,\dots,r_n$ tels que

$$
\begin{array}{lcll}
r_1 J^{n-1}u & \geqq & J^n u - \alpha & \text{partout} \\
r_2 J^{n-2}u & \geqq & J^{n-1}u - \alpha & \text{''} \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
r_{n-1} Ju & \geqq & J^2 u - \alpha & \text{''} \\
r_n u & \geqq & Ju - \alpha & \text{''}
\end{array}
$$

Nous posons aussi $w = \sup_{k=0,\dots,n} J^k u - \frac{k\varepsilon}{n}$, avec $J^0 u=u$ de sorte que $w \geqq u$. Ensuite

$$k(x) = \inf \{ k : w(x) = J^k u(x) - \frac{k\varepsilon}{n} \}$$

et nous définissons un noyau permis r en posant

si $k(x)=0$, i.e. si $w(x)=u(x)$, $\varepsilon_x r = \varepsilon_x$

sinon $\varepsilon_x r = \varepsilon_x r_{n-k(x)+1}$

Nous allons montrer que r répond à la question[1]. Le choix de r peut paraître obscur, mais ce n'est pas tellement vrai : le but du joueur est de se construire une stratégie dont l'utilité dépasse $J^n u - \varepsilon$. Or la stratégie consistant à jouer

r_1 , r_2 , $\dots r_n$, puis arrêt

a une utilité $\geqq J^n u - \varepsilon$. Celle qui consiste à jouer

r_{n-k+1} , $r_{n-k+2},\dots,r_n$, puis arrêt

a une utilité $\geqq J^k u - k\varepsilon/n$. S'il se trouve qu'au point x où se trouve le joueur on a $J^k u(x) - k\varepsilon/n \geqq J^n u(x) - \varepsilon$, la seconde

(1) voir une autre démonstration en appendice.

stratégie a une utilité supérieure à la première au point x, et de plus elle est plus courte. On voit ainsi ce que signifie le noyau r : à chaque instant, le joueur <u>commence</u> la stratégie la plus courte (parmi les précédentes) lui permettant d'atteindre le but - une utilité $\geqq J^n u-\varepsilon$ - au point où il se trouve. Nous allons étudier la stratégie markovienne stationnaire [r].

Tout d'abord, supposons $k(x)=k>0$. Nous avons partout $rJ^{k-1}u = r_{n-k+1}J^{k-1}u \geqq J^k u-\alpha$

Mais au point x nous avons $w=J^k u - k\varepsilon/n$. Donc en x

$$rw \geqq rJ^{k-1}u - \frac{k-1}{n}\varepsilon \geqq J^k u - \frac{k-1}{n}\varepsilon - \alpha = w+\frac{k\varepsilon}{n} - \frac{k-1}{n}\varepsilon - \alpha$$
$$= w+\alpha$$

Si nous avons $k(x)=0$, donc $w=u$, nous avons en x $rw=w$. Ainsi $rw\geqq w$ partout. Du point de vue probabiliste, cela signifie que pour toute loi initiale λ le processus $(w\circ X_i)$ est une sous-martingale pour la loi $P_{\lambda,[r]}$.

Soit $B = \sup_x |w(x)|$ - on rappelle que u est bornée - on a en désignant par T le temps d'entrée dans $\{w=u\}$, et pour tout entier m

$$2B \geqq E_{\lambda,[r]}[w\circ X_m - w\circ X_0] = E_{\lambda,[r]}[\sum_{C}^{m-1} (rw-w)\circ X_i]$$
$$\geqq m\alpha P_{\lambda,[r]}\{T>m\}$$

puisque $rw-w \geqq \alpha$ hors de $\{w=u\}$. Ainsi $P\{T>m\}\to 0$ ($m\to\infty$), et T est p.s. fini : autrement dit, il existe p.s. un instant où le joueur cesse de jouer. Nous avons ensuite

$$E_{\lambda,[r]}[\ w\circ X_m - u\circ X_m] = \int_{\{T>m\}} (w\circ X_m - u\circ X_m)\ dP_{\lambda,[r]}$$

puisque $w\circ X_m = u\circ X_m$ sur $\{T\leqq m\}$, le processus s'arrêtant à l' instant T. Cette dernière intégrale vaut au plus $2BP\{T>m\}$ qui est petit. On peut donc écrire , avec un $\varepsilon_m \to 0$

$$\overline{u}(\lambda,[r]) \geqq E_{\lambda,[r]}[u\circ X_m] \geqq E_{\lambda,[r]}[w\circ X_m]-\varepsilon_m \geqq \langle\lambda,w\rangle-\varepsilon_m$$
$$\geqq \langle \lambda, J^n u \rangle - \varepsilon-\varepsilon_m$$

On fait tendre m vers $+\infty$ et le théorème est établi.
Il faut noter que la mesure μ de l'énoncé n'est intervenue que dans la construction de la maison de jeu finie que l'on a utilisée : il n'y a plus eu ensuite d'ensembles μ-négligeables.

REMARQUE. Il est intéressant de noter que dans la dernière formule, c'est encore $E_{\lambda,[r]}[u\circ X_m]$ qui apparaît, et qu'ainsi les temps d'arrêt non constants sont inutiles pour le calcul de l'utilité de la maison de jeu au moyen de stratégies markoviennes stationnaires.

Nous passons maintenant au second théorème de SUDDERTH, qui étend le précédent au cas $n=+\infty$. L'idée de se ramener progressivement à une maison de jeu ne comportant que deux jeux est due à ORNSTEIN (dans l'axiomatique différente utilisée par DUBINS et SAVAGE). On rappelle que u est bornée.[1]

THEOREME 3. Pour toute loi initiale μ, il existe un noyau permis r tel que l'on ait μ-presque partout

$$\bar{u}(x,[r]) \geqq J^{\infty}u(x) - \varepsilon$$

(et l'on peut même remplacer le premier membre par $\lim_{n\to\infty} E_{x,[r]}[u\circ X_m]$, de sorte que l'arrêt aléatoire est inutile).

DEMONSTRATION. La remarque précédant la démonstration du th.2 nous permet (en ne modifiant $\bar{u}$ que sur un ensemble μ-négligeable) de supposer que J est réunion dénombrable de graphes de noyaux. Alors Ju est borélienne pour toute fonction borélienne u, et cela simplifie les discussions de mesurabilité.

Nous nous donnons une suite décroissante de nombres $\varepsilon_n \in\,]0,1]$, telle que $\sum_n \varepsilon_n+\varepsilon_n^2 \leqq \varepsilon$.

D'après le théorème 2, nous pouvons trouver un noyau permis r_1 tel que

$$\mu\ \{\ x : \bar{u}(x,[r_1]) > J^{\infty}u(x) - \varepsilon_1^2\ \} > 1-2^{-1}$$

Nous noterons A_1 cet ensemble, B_1 l'ensemble

$$\{\ x : \bar{u}(x,[r_1]) > J^{\infty}u(x) - \varepsilon_1\ \}$$

et nous définirons la nouvelle maison de jeu $J_1 \subset J$ par

$$J_1(x) = \{\ \varepsilon_x, \varepsilon_x r_1\ \} \quad \text{si } x\in B_1 \text{ et } \varepsilon_x r_1 \neq \varepsilon_x$$
$$= J(x) \text{ sinon}$$

Nous choisissons ensuite un noyau r_2 permis dans J_1 tel que

$$\mu\ \{\ x : \bar{u}(x,[r_2]) > J_1^{\infty}u(x) - \varepsilon_2^2\ \} > 1-2^{-2}$$

nous noterons A_2 cet ensemble, B_2 l'ensemble

$$\{\ x : \bar{u}(x,[r_2]) > J_1^{\infty}u(x) - \varepsilon_2\ \}$$

(1) Nous supposerons $u\leqq 1$ pour fixer les idées.

et nous définissons J_2 par

$$J_2(x) = \{\ \varepsilon_x,\ \varepsilon_x r_2\ \}\ \text{si}\ x\in B_2\ \text{et}\ \varepsilon_x r_2 \neq \varepsilon_x$$
$$= J(x)\ \text{sinon}\ .$$

Et ainsi de suite... Les maisons J_n décroissent. Je dis que si pour un k $J_k(x)$ comporte exactement deux jeux distincts, ε_x et γ, il en est de même de $J_{k+1}(x)$. C'est vrai en effet si $x\notin B_{k+1}$, ou si $\varepsilon_x r_{k+1}=\varepsilon_x$, puisqu'alors $J_{k+1}(x)=J_k(x)$. Si $x\in B_{k+1}$ et $\varepsilon_x r_{k+1}\neq\varepsilon_x$, alors $\varepsilon_x r_{k+1}=\gamma$, et $J_{k+1}(x)=\{\varepsilon_x r_{k+1}, \varepsilon_x\}$ est encore égal à $J_k(x)$.

Nous définissons maintenant la maison de jeu $\tilde{J}$ de la manière suivante : s'il existe un k tel que $J_k(x)$ comporte deux jeux, alors $\tilde{J}(x)=J_k(x)$. Dans le cas contraire, $\tilde{J}(x)=\varepsilon_x$. Il n'y a aucune difficulté, du fait que J a été supposé réunion dénombrable de graphes. D'après la remarque à la fin du §2, nous savons que $\tilde{J}$ admet une stratégie markovienne stationnaire optimale $[r]$; le noyau r est permis dans J, et pour établir le théorème, il nous suffit de montrer que $\tilde{J}^{\infty}u \geqq J^{\infty}u-\varepsilon$ μ-presque partout, ce que nous allons faire à présent.

LEMME.(1) $\underline{\text{On a}}$ $J_k^{\infty}u(x) \geqq J_{k-1}^{\infty}u(x)-\varepsilon_k$ $\underline{\text{partout}}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de raisonner sur J_1 et $J_0=J$. Nous avons $J^{\infty}u(x) = \sup\limits_{a,m} E_{x,[a]}[u\circ X_m]$ d'après le corollaire du théorème 2, et la remarque suivant ce théorème, a parcourant l'ensemble des noyaux permis dans J. Soit $\sigma = (s_n)$ la stratégie (permise dans J_1)

$$s_{n+1}(x_o,..x_n\ ;\ dy) = \begin{cases} a(x_n,dy) & \text{pour } n<T \\ r_1(x_n,dy) & \text{pour } n\geqq T \end{cases}$$

T étant le temps d'entrée dans B_1. Nous avons

$$E_{x,[a]}[u\circ X_m] = E_{x,[a]}[u\circ X_m\ ,\ m<T] + E_{x,[a]}[u\circ X_m\ , m\geqq T]$$

Le premier terme peut être remplacé par $E_{x,\sigma}\ [u\circ X_m, m<T]$. Le second s'écrit, d'après la propriété de Markov forte, comme l'intégrale pour $P_{x,[a]}$ de $E_{X_T(\omega),[a]}[u\circ X_{m-T(\omega)}] \leqq J^{\infty}u\circ X_T$. Cette intégrale peut être remplacée par une intégrale relativement à $P_{x,\sigma}$, les deux lois coïncidant sur $\underline{\underline{F}}_T$. D'autre part, on a $X_T\in B_1$, donc $J^{\infty}u\circ X_T < \bar{u}(X_T,[r_1]) + \varepsilon_1$. Soit λ la loi de X_T. Choisissons un entier p assez grand pour que

---

(1) Voir l'appendice

$$< \lambda, J^{\infty}u > \leqq E_{\lambda,[r_1]}[u\circ X_p] + \varepsilon_1$$

et soit S le temps d'arrêt égal à m si $m<T$, à $T+p$ si $m\geqq T$. En regroupant les résultats on trouve

$$E_{x,[a]}[u\circ X_m] \leqq E_{x,\sigma}[u\circ X_S]+\varepsilon_1 \leqq J_1^{\infty}u(x)+\varepsilon_1$$

Le lemme est établi.

LEMME. <u>Soit</u> s_k <u>le noyau</u> (<u>permis dans</u> $\mathfrak{J}$)

$$\varepsilon_x s_k = \varepsilon_x r_k \ \underline{\text{si}}\ x\in B_k \ , \ \varepsilon_x s_k = \varepsilon_x \ \underline{\text{si}}\ x\notin B_k$$

<u>alors si</u> $x\in A_k$ <u>on a</u> $\overline{u}(x,[s_k]) \geqq J_{k-1}^{\infty}u-\varepsilon_k^2-\varepsilon_k$

Avant de prouver ce lemme, montrons comment il permet de conclure : il nous donne que pour tout k $\tilde{J}^{\infty}u \geqq J_{k-1}^{\infty}u-\varepsilon_k^2-\varepsilon_k$ sur A_k. D'après le lemme précédent, cela dépasse $J^{\infty}u-\varepsilon$, et d'autre part la réunion des A_k est égale à E à un ensemble μ-négligeable près : c'est ce qu'on désire.

DEMONSTRATION . Tout d'abord, s_k est permis dans $\mathfrak{J}$: si $\varepsilon_x s_k = \varepsilon_x$ c'est évident, et si $\varepsilon_x s_k \neq \varepsilon_x$ c'est que $\varepsilon_x s_k = \varepsilon_x r_k \neq \varepsilon_x$, et dans ce cas $\varepsilon_x r_k$ est dans $\tilde{J}(x)$.

Il suffira de traiter le cas où $k=1$. Prenons $x\in A_1$ et choisissons un entier m tel que $E_{x,[r_1]}[u\circ X_m] \geqq J^{\infty}u(x)- \varepsilon_1^2$. Soit T le temps d'entrée dans B_1^c ; comme u a été supposée $\leqq 1$, on a

$$\begin{aligned}\overline{u}(x,[s_1]) &\geqq E_{x,[s_1]}[u\circ X_m \ ,m<T] \\ &\geqq E_{x,[s_1]}[u\circ X_m] - P_{x,[s_1]}\{T\leqq m\} \\ &\geqq J^{\infty}u(x)-\varepsilon_1^2-P_{x,[s_1]}\{T\leqq m\}\end{aligned}$$

Il suffira donc de montrer que cette dernière probabilité est au plus égale à ε_1. On écrit

$$\begin{aligned}J^{\infty}u(x)-\varepsilon_1^2 \leqq E_{x,[r_1]}[u\circ X_m] &= \int_{\{T\leqq m\}} u\circ X_m + \int_{\{m<T\}} u\circ X_m \\ &\leqq \int_{\{T\leqq m\}} u\circ X_m + \int_{\{m<T\}} J^{\infty}u\circ X_m\end{aligned}$$

Les intégrales sont prises par rapport à $P_{x,[r_1]}$, mais on a $P_{x,[r_1]}\{T\leqq m\} = P_{x,[s_1]}\{T\leqq m\}$, les deux mesures étant égales sur $\underline{\underline{F}}_T$. Dans la première intégrale au dernier membre, appliquons la propriété de Markov forte : nous la majorons

par $\int_{\{T\leqq m\}} \bar{u}(X_T,[r_1]) \leqq \int_{\{T\leqq m\}} (J^{\infty}u_\circ X_T-\varepsilon_1)$ puisque $X_T \in B_1^c$.
Autrement dit

$$J^{\infty}u(x)-\varepsilon_1^2 \leqq \int J^{\infty}u\circ X_{T\wedge m} - \varepsilon_1 P_{x,[r_1]}\{T\leqq m\}$$

$$\leqq J^{\infty}u(x)- \varepsilon_1 P_{x,[r_1]}\{T\leqq m\}$$

et le lemme est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. D. BLACKWELL . On a class of probability spaces. Proc. 3rd Berkeley Symposium, t.2, 1956, p. 1-6.

[2]. N.BOURBAKI. Topologie Générale , chap.IX (utilisation des nombres réels...) Hermann, Paris 1958.

[3]. L.E.DUBINS, L.J.SAVAGE. How to Gamble if you must. McGraw-Hill, New York 1965.

[4]. P.A.MEYER. Probabilités et potentiels. Hermann, Paris, Blaisdell, Boston, 1966.

[5]. G.MOKOBODZKI. Capacités Fonctionnelles. Séminaire CHOQUET (Initiation à l'analyse), 6e année, 1966.

[6]. Yu.V.PROKHOROV. Convergence of random processes and limit theorems in probability. Teoriia Ver. t.1, 1956.

[7]. R.E.STRAUCH. Measurable gambling houses. Trans. Amer.M. Soc. t.126, 1967, p.64-72. Correction : t.130, 1967,p.184.

[8]. W.D.SUDDERTH. On the existence of good stationary strategies. Trans. Amer. M.Soc. t. 135, 1969, p.399-414.

[9]. C.DELLACHERIE : livre à paraître en 1972 chez Springer (Ergebnisse der Math.).

Des exemplaires de la thèse de 3e Cycle de M.TRAKI (qui expose aussi d'autres résultats de [3]) sont disponibles à l'Institut de Mathématique de Strasbourg.

APPENDICE

Cet appendice est une rédaction de commentaires de G.MOKOBODZKI sur l'exposé précédent.

Tout d'abord, la remarque de la fin du § 2 (qui joue un rôle important au § 3) est fausse : si u est une fonction positive bornée, $\bar{u}$ sa réduite relativement au noyau markovien r, A l'ensemble $\{u=\bar{u}\}$, $\bar{u}$ n'est " portée par A" , i.e. égale à $H_A\bar{u} = H_A u$, que si u est majorée par un potentiel : sinon, on construit aisément des exemples où A est vide. Le lecteur pourra consulter sur ces questions le volume IV du séminaire, p 174-175.

On va commencer par reprendre cette question. On note r un noyau markovien. La réduite de u pour r est notée $\bar{u}$ ou $R_r u$ s'il est nécessaire de faire apparaître r dans la notation.

LEMME. <u>Soit</u> $\lambda \in]0,1[$, <u>et soit</u> $A=\{u>\lambda\bar{u}\}$. <u>Alors</u> $\bar{u}=H_A\bar{u}$ (<u>ou</u>, <u>ce qui revient au même</u>, $\bar{u}=R(\bar{u}I_A)$).

En effet, soit v la fonction excessive $R(\bar{u}I_A)$. On a $u \leqq \lambda\bar{u}+(1-\lambda)v$, cette égalité se réduisant sur A à $u \leqq \bar{u}$, et sur A^c à la définition de A. Cette fonction étant excessive, elle est $\geqq \bar{u}$, par définition de la réduite de u . Mais elle est aussi $\leqq \bar{u}$, donc égale à $\bar{u}$, et il vient enfin $v=\bar{u}$.

LEMME. <u>Soit</u> $\varepsilon>0$, <u>et soit</u> $A=\{u>\bar{u}-\varepsilon\}$. <u>Alors</u> $H_A\bar{u}=\bar{u}$.

En effet, A contient $\{u>\lambda\bar{u}\}$ pour λ assez voisin de 1, $\bar{u}$ étant bornée.

Revenons maintenant à la remarque de la fin du § 2, et prenons pour A l'ensemble $\{u>\bar{u}-\varepsilon\}$, pour r le noyau $J_A+J_{A'}P$. Comme dans la remarque, on a $\limsup_n r^n u \leqq \bar{u}$, $\liminf_n r^n u \geqq H_A u \geqq H_A\bar{u}-\varepsilon = \bar{u}-\varepsilon$. La stratégie [r] est donc optimale à ε près.

Soit maintenant $B=\{u=\bar{u}\}$, et soit $s=J_B+J_{B'}P$. La stratégie [r] est obtenue par arrêt de la stratégie [s] à l'entrée dans A, et [s] est donc optimale à ε près pour tout ε, i.e. optimale - mais cette fois il faut se permettre des arrêts aléatoires. Noter d'ailleurs que la stratégie [s] est elle même obtenue par arrêt de [P] à l'entrée de B, de sorte que [P] elle même est optimale, au sens technique donné à ce terme au § 1 .

De toute façon, pour l'application qui est donnée au § 3 , nous ne cherchons qu'un résultat à ε près, et le noyau r nous suffit.

Les autres commentaires sont des modifications de certaines démonstrations : MOKOBODZKI nous a communiqué des démonstrations " sans probabilités" de tous les résultats de l'exposé. Nous allons laisser de côté celle du dernier lemme, qui n'est pas plus simple que la démonstration probabiliste. En revanche, nous allons démontrer analytiquement le résultat auxiliaire du th.2 , et le premier lemme pour le th.3.

Le premier résultat peut s'énoncer ainsi :

LEMME. Soient r un noyau, u et w deux fonctions bornées telles que $w \geqq u$, que $rw=w$ sur l'ensemble $A=\{w=u\}$, que $rw \geqq w+\alpha$ sur A^c . On a alors $w \leqq R_r u$.

DEMONSTRATION. Introduisons A', le complémentaire de A, et le noyau $s=I_{A'}r$. Prouvons d'abord que la fonction $G_s 1$ est bornée, G_s étant le potentiel de s. On sait que $G_s I_A \leqq 1$ partout (c'est $R_r(I_A)$). On a d'autre part, si k est une constante majorant w

$$(I-s)(k-w) \geqq sw-w \geqq \alpha I_{A'}$$

En appliquant $(I+s\ldots+s^n)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient que $G_s(I_{A'}) \leqq \sup_n (I-s^n)(k-w)$, fonction bornée.

Toute fonction bornée g est alors le potentiel $G_s(I-s)g$. En particulier, $(I-s)w=w=u$ dans A, et $(I-s)w \leq 0$ dans A', de sorte que

$$w = G_s(uI_A) - G_s h \quad (h \geqq 0,\ h=0 \text{ dans } A)$$

d'après le principe de domination à G_s : toute fonction excessive pour s, majorant w sur A, la majore partout. Autrement dit

$$w \leqq R_s w = R_s(wI_A) \leqq R_r(wI_A) \leqq R_r u$$

(la 3e inégalité vient du fait qu'il y a plus de fonctions s-excessives que de fonctions r-excessives). CQFD.

Le second résultat prend une forme particulièrement simple, indépendante de la situation particulière considérée dans la démonstration du théorème 3.

LEMME. Considérons deux maisons de jeu J,K, avec $J \subset K$, et supposons que les fonctions $J^\infty u$, $K^\infty u$ soient boréliennes. Soit A l'ensemble $\{J^\infty u > K^\infty u - \varepsilon \}$, et soit L la maison de jeu

$$L(x) = J(x) \text{ si } x \in A \quad , \ L(x)=K(x) \text{ si } x \in A^c$$

On a alors $L^\infty u \geqq K^\infty u - \varepsilon$ partout.

DEMONSTRATION. Posons $v=J^{\infty}u$, et

$$w = K^{\infty}v \quad \text{sur } A$$
$$= v \quad \text{sur } A^c$$

Il faut noter que $K^{\infty}v = K^{\infty}u$, et que $v \leqq w \leqq K^{\infty}v$, de sorte que $K^{\infty}w = K^{\infty}v = K^{\infty}u$. La définition de A entraîne que $v \leqq w \leqq v+\varepsilon$, de sorte que $L^{\infty}w \leqq L^{\infty}v + \varepsilon$. Comme L contient J, on a $L^{\infty}v = L^{\infty}J^{\infty}u = L^{\infty}u$. Il reste donc seulement à montrer que $L^{\infty}w = K^{\infty}u$. Nous allons montrer par récurrence que $L^n w \geqq K^n w$: comme $K^{\infty}w = K^{\infty}u$, nous aurons le résultat cherché en faisant tendre n vers $+\infty$.

Pour n=0, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $L^n w \geqq K^n w$. Nous avons alors , comme $LL^n w \geqq LK^n w$

sur A^c , $L(x)=K(x)$, donc $LL^n w \geqq LK^n w = K^{n+1}w$

sur A , $L^{n+1}w \geqq w = K^{\infty}v = K^{\infty}w \geqq K^n w$.

La démonstration est achevée.

Paul André Meyer
Institut de Recherche Mathématique Alsacien
Laboratoire associé au CNRS
7 rue René Descartes, 67-Strasbourg