PAUL-ANDRÉ MEYER

Chirurgie sur un processus de Markov, d'après Knight et Pittenger

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 146-154
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__146_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

CHIRURGIE SUR UN PROCESSUS DE MARKOV D'APRES KNIGHT ET PITTENGER

(exposé de P.A.Meyer)

Pour satisfaire à la mode actuelle des transformations de processus, on va présenter ici le très joli " changement de temps non adapté" qui permet à KNIGHT et PITTENGER de faire disparaître certaines excursions du processus.

L'article de K-P paraîtra, sans doute en 1972, dans le ZfW. La démonstration qu'on trouvera ici est étroitement inspirée de la leur, avec quelques nuances : par exemple, nos processus n'ont pas de limites à gauche, il faut donc remplacer la récurrence de K-P par une récurrence transfinie ; nous avons explicité une famille de tribus raisonnable par rapport à laquelle le processus est markovien, et il y a quelques autres détails.

NOTATIONS. $\Omega, \underline{\underline{F}}, (X_t), P^x$, etc. ont les significations usuelles en théorie des processus de Markov (réalisation continue à droite canonique, d'un semi-groupe satisfaisant aux hypothèses droites). L'espace d'états est noté $E\cup\{\partial\}$. Si C est un ensemble borélien, on pose

(1) $$D_C = \inf\{t \geqq 0 \ , \ X_t \in C\}$$

le temps d'entrée usuel ($\inf\{t>0\ldots\}$) sera noté T_C si nécessaire. Nous considérons deux ensembles boréliens A et B tels que $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$; les choses sont plus jolies si l'on suppose que $\partial\in B$: nous le ferons. Nous définissons des v.a. de la manière suivante

(2) $$S_0 = L_0 = M_0 = 0$$

(3) $$\begin{aligned} &S_1 = D_B \\ &L_1 = \sup\{\ t<S_1,\ X_t \in A\ \} \qquad (\ \sup\emptyset = 0\ ) \\ &M_1 = \inf\{\ t>S_1,\ X_t \in A\ \} \end{aligned}$$

et ensuite, par récurrence transfinie : si α est un ordinal dénombrable

(4) $$\begin{aligned} S_{\alpha+1} &= M_\alpha + S_1 \circ \theta_{M_\alpha} \\ L_{\alpha+1} &= M_\alpha + L_1 \circ \theta_{M_\alpha} \\ M_{\alpha+1} &= M_\alpha + M_1 \circ \theta_{M_\alpha} \end{aligned}$$

et si α est un ordinal limite (dénombrable)

(5) $$S_\alpha = L_\alpha = M_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} M_\beta$$

La signification de ces constructions est la suivante : appelons <u>A-excursions</u> de $\omega\in\Omega$ les applications

$$e : [U,V] \longrightarrow E\cup\{\partial\}$$
$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

où les intervalles $]U,V[$ sont les intervalles ouverts maximaux où ω ne rencontre pas A. Nous disons que l'excursion e est <u>de type</u> (A,B) si e rencontre B. Si $V=\infty$, la convention usuelle $X_\infty = \partial\in B$ justifie le fait de considérer l'excursion comme étant de type (A,B).

Les intervalles $[L_\alpha, M_\alpha[$ sont les ensembles de définition des excursions de type (A,B), à cela près que certains sont vides : ceux pour lesquels $L_\alpha=\infty$, bien sûr, et ceux qui correspondent à des ordinaux limites.

Désignons par $b_t(\omega)$ la fonction de t qui vaut 0 dans chacun des intervalles $[L_\alpha, M_\alpha[$, 1 sinon, et posons

(6) $$H_t = \int_0^t b_s ds$$

C'est un processus croissant continu, linéaire par morceaux, et non adapté. Sa fonction inverse

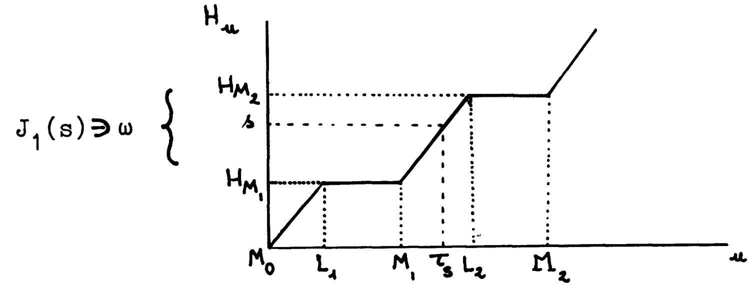
(7) $$\tau_t = \inf \{ s : H_s > t \} \qquad (\inf \emptyset = +\infty)$$

est un processus croissant (non adapté) continu à droite. Enfin nous considérons le "processus opéré"

(8) $$Y_t = X_{\tau_t} \qquad (X_\infty = \partial)$$

Intuitivement, on a découpé toutes les excursions de type (A,B) et recollé les bouts de trajectoires restants. Il est assez clair pour l'intuition que ce processus doit être markovien stationnaire, mais ce n'est pas très facile à démontrer : l'exposé y sera consacré.

Nous dessinons d'abord le graphe de $H_.(\omega)$ pour un ω typique, et nous indiquons un certain nombre de propriétés que le lecteur n'aura aucun mal à établir, en s'aidant du dessin ou autrement.



(9) $\tau_{t+u} = \tau_t + \tau_u \circ \theta_{\tau_t}$

(10) $\{ M_\alpha \leqq \tau_s < M_{\alpha+1} \} = \{ H_{M_\alpha} \leqq s < H_{M_{\alpha+1}} \}$

(11) $\{L_1>0\} = \{\tau_0=0\}$.

Notre premier travail (particulièrement ennuyeux) va consister à définir une famille de tribus $(\underline{\underline{G}}_t)$ à laquelle le processus (Y_t) sera adapté. T désignant une variable aléatoire $\geqq 0$, posons

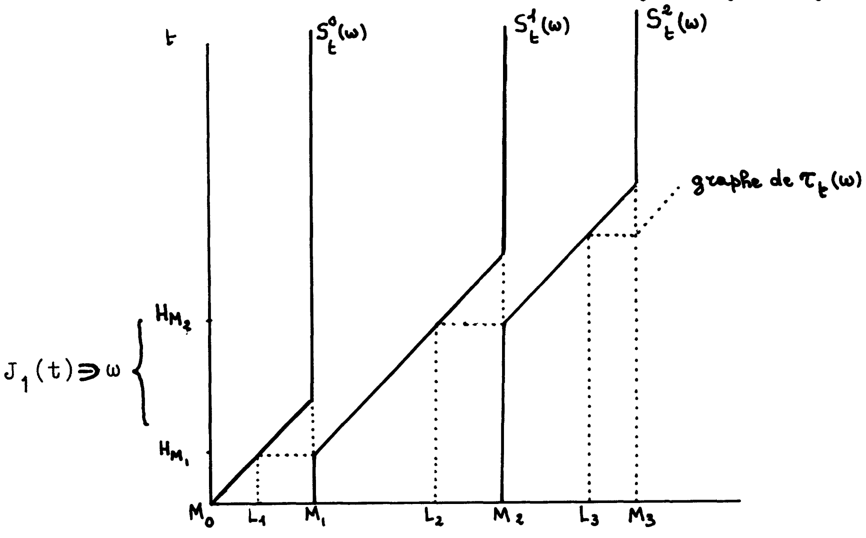
(12) $J_\alpha(T) = \{ M_\alpha \leqq \tau_T < M_{\alpha+1} \} = \{ H_{M_\alpha} \leqq T < H_{M_{\alpha+1}} \}$

Ces ensembles forment une partition de $\{T<\infty\}$, et en fait une partition <u>dénombrable</u>. En effet, nous avons $M_1>0$ identiquement, donc $M_\alpha < M_{\alpha+1}$ sur $\{M_\alpha<\infty\}$ et un raisonnement bien connu entraîne l'existence, pour toute loi μ sur $E\cup\{\partial\}$, d'un ordinal β dénombrable (dépendant de μ) tel que $M_\beta=+\infty$ P^μ-p.s.

Nous définissons ensuite les variables aléatoires

(13) $S_t^\alpha = (M_\alpha + (t-H_{M_\alpha})^+) \wedge M_{\alpha+1}$

et de même S_T^α , bien sûr. Nous dessinons ci-dessous, l'axe des t étant vertical, l'allure des graphes de $S_t^0(\omega), S_t^1(\omega), S_t^2(\omega)$:



S_t^α croît avec α et t. Pour tout t et tout α , c'est un temps d'arrêt. En effet , les M_α sont des temps d'arrêt [démonstration par récurrence : $M_{\alpha+1}$ est la première-rencontre-de-A-après-la-première-rencontre-de-B-après-M_α] , et il suffit donc de montrer que $U_\alpha = M_\alpha + (t-H_{M_\alpha})^+$ est un temps d'arrêt - ou encore, comme $U_\alpha \geq M_\alpha$, que U_α est $\underline{\underline{F}}_{M_\alpha}$ -mesurable. Mais H_{M_α} est, pour $\varepsilon>0$ petit, égal à M_α moins la longueur totale des excursions de type (A,B) de la trajectoire tuée à $M_\alpha+\varepsilon$: il est donc bien $\underline{\underline{F}}_{M_\alpha}$ $(=\underline{\underline{F}}_{M_\alpha+})$ mesurable.

Nous pouvons maintenant définir les tribus $\underline{\underline{G}}_t$:

(14) $\quad K\in\underline{\underline{G}}_t \iff K\in\underline{\underline{F}}$ et pour tout α il existe $K_\alpha \in \underline{\underline{F}}_{S_t^\alpha}$ tel que

$$K\cap J_\alpha(t) = K_\alpha \cap J_\alpha(t)$$

Par exemple, τ_t est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable ($\tau_t = S_t^\alpha$ sur $J_\alpha(t)$) , Y_t est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable ($Y_t = X_{S_t^\alpha}$ sur $J_\alpha(t)$).

ETUDE DE LA FAMILLE ($\underline{\underline{G}}_t$)

Nous allons commencer par un lemme sur les familles de tribus qui doit pouvoir servir à autre chose.

LEMME. Soit $(W,\underline{\underline{U}})$ un espace mesurable, et soit (C_t) une famille d'ensembles mesurables, décroissante et continue à droite. Soit $(\underline{\underline{U}}_t)$ une famille croissante et continue à droite de sous-tribus de $\underline{\underline{U}}$. Définissons la tribu $\underline{\underline{V}}_t$ par

(15) $\quad (A \in \underline{\underline{V}}_t) \iff (A\in\underline{\underline{U}}$ et il existe $B\in\underline{\underline{U}}_t$ tel que $A\cap C_t = B\cap C_t)$

La famille $(\underline{\underline{V}}_t)$ est alors croissante et continue à droite. Si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{V}}_t)$, il existe un temps d'arrêt T' de $(\underline{\underline{U}}_t)$ tel que l'on ait pour tout t $T'\wedge t = T\wedge t$ sur C_t .

DEMONSTRATION. La première phrase est évidente. Pour prouver la seconde il suffit de considérer des temps d'arrêt étagés puis, comme tout t.d'a. étagé est un inf fini de tels temps d'arrêt, des t.d'a. de la forme

$$T=a \text{ sur } A\in\underline{\underline{V}}_a \quad , \quad T=+\infty \text{ sur } A^c$$

Nous choisissons alors $B\in\underline{\underline{U}}_a$ tel que $B\cap C_a = A\cap C_a$, et nous posons

$$T'=a \text{ sur } B \quad , \quad T'=+\infty \text{ sur } B^c$$

On vérifie aussitôt que T' répond à la question. Voici une première application du lemme :

PROPOSITION 1. La famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ est croissante et continue à droite.

DEMONSTRATION. Nous appliquons le lemme avec $\underline{\underline{U}}_t=\underline{\underline{F}}_{S_t^\alpha}$, $C_t=J_\alpha(t)$, ce qui nous donne une famille croissante et continue à droite $(\underline{\underline{V}}_t^\alpha)$; nous avons $\underline{\underline{G}}_t=\bigcap_\alpha \underline{\underline{V}}_t^\alpha$.

PROPOSITION 2. Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. Pour tout α il existe un temps d'arrêt T_α de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que $T=\tau_{T_\alpha}$ sur $J_\alpha(T)$, et que $J_\alpha(T)=\{M_\alpha\leq T_\alpha<L_{\alpha+1}\}$.

DEMONSTRATION. D'après le lemme, il existe un temps d'arrêt T' de la famille $\underline{\underline{F}}_{S_t^\alpha}$ tel que $T\wedge t=T'\wedge t$ sur $J_\alpha(t)$ pour tout t. Plaçons nous sur $J_\alpha(T)=\{H_{M_\alpha}\leq T<H_{M_{\alpha+1}}\}$ et prenons $T<t<H_{M_{\alpha+1}}$: alors $T'\wedge t=T\wedge t=T<t$, donc $T'=T$ sur $J_\alpha(T)$, et $J_\alpha(T')\supset J_\alpha(T)$. On voit de manière symétrique que $J_\alpha(T')=J_\alpha(T)$.

Nous posons $T_\alpha=S_{T'}^\alpha$. C'est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ car

$$\{T_\alpha<u\} = \bigcup_{r \text{ rationnel}} (\{T'<r\}\cap\{S_r^\alpha<u\}) \in \underline{\underline{F}}_u$$

du fait que $\{T'<r\}\in\underline{\underline{F}}_{S_r^\alpha}$. Un coup d'œil au dessin (où $\alpha=1$) montre que la fonction $\tau_.$ sur $[H_{M_\alpha},H_{M_{\alpha+1}}[$ admet comme fonction réciproque $S_.^\alpha$ sur $[M_\alpha,L_{\alpha+1}[$, d'où la relation $T=T'=\tau_{T_\alpha}$ sur $J_\alpha(T)$. D'autre part un coup d'œil au graphe de $S_.^\alpha$ montre que $J_\alpha(T)=J_\alpha(T')=\{M_\alpha<T_\alpha<L_{\alpha+1}\}$.

LA PROPRIETE DE MARKOV

Si C est une partie borélienne de $E\cup\{\partial\}$, posons pour $t\geq 0$

$$(16)\qquad \begin{aligned} Q_t(x,C) &= P^x\{Y_t\in C \mid \tau_0=0\} \text{ si } P^x\{\tau_0=0\} > 0 \\ &= \varepsilon_\partial(C) \text{ sinon } \quad (\text{ en particulier si } x=\partial\ ) \end{aligned}$$

Ce sont des noyaux markoviens, et si f est continue la fonction $Q_.(x,f)$ est continue à droite. On a $Q_0(x,.)=\varepsilon_x$ si $P^x\{\tau_0=0\}>0$. Dans le cas contraire, il y a branchement (dégénéré) vers ∂.

THEOREME 1. Si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, si f est borélienne bornée sur $E\cup\{\partial\}$, on a pour tout s et tout μ

$$(17)\qquad E^\mu[f\circ Y_{T+s}|\underline{\underline{G}}_T] = Q_s(Y_T,f) \quad P^\mu\text{-p.s.}$$

DEMONSTRATION. Sur $\{T=\infty\}\in\underline{\underline{G}}_T$, c'est évident. Comme d'habitude, en remplaçant T par T_A ($A\in\underline{\underline{G}}_T$), on se ramène à la forme intégrée $E^\mu[f\circ Y_{T+s}]=E^\mu[Q_s(Y_T,f)]$. Découpant Ω en $\{T=\infty\}$ (pour lequel c'est évident) et les $J_\alpha(T)$, on se ramène à vérifier que pour tout α

(18) $\qquad E^{\mu}[f\circ Y_{T+s}\ ,\ J_{\alpha}(T)] = E^{\mu}[Q\ (Y_T,f),\ J_{\alpha}(T)]$

<u>Nous remplaçons</u> Y_{T+s} par $X_{\tau_{T+s}} = X_{\tau_s}\circ\Theta_{\tau_T} = Y_s\circ\Theta_{T_\alpha}$ sur $J_\alpha(T)$, T_α étant le temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ introduit dans la proposition 2 .

Y_T par X_{T_α} sur $J_\alpha(T)$

$J_\alpha(T)$ par $\{M_\alpha\leq T_\alpha<L_{\alpha+1}\}=\{M_\alpha\leq T_\alpha<S_{\alpha+1}, L_1\circ\Theta_{T_\alpha}>0\}$

Ainsi le côté gauche de (18) s'écrit, en utilisant la propriété de Markov forte (noter que $\{M_\alpha\leq T_\alpha<S_{\alpha+1}\}\in\underline{\underline{F}}_{T_\alpha}$)

(19) $E^{\mu}[\ M_\alpha\leq T_\alpha<S_{\alpha+1}\ ,\ f\circ Y_s\circ\Theta_{T_\alpha}\ ,\ L_1\circ\Theta_{T_\alpha}>0\ ] =$

$E^{\mu}[\ M_\alpha\leq T_\alpha<S_{\alpha+1}\ ,\ E^{X_{T_\alpha}}[f\circ Y_s\ ,L_1>0]]$

Mais $L_1>0$ équivaut à $\tau_0=0$, donc cette espérance intérieure vaut $P^{X_{T_\alpha}}\{L_1>0\}Q_s(X_{T_\alpha},f)$. Comme $Q_s(X_{T_\alpha},f)$ est $\underline{\underline{F}}_{T_\alpha}$-mesurable, nous utilisons à nouveau la propriété de Markov forte pour écrire l'espérance comme

(20) $E^{\mu}[\ M_\alpha\leq T_\alpha<S_{\alpha+1}\ ,\ Q_s(Y_T,f),\ L_1\circ\Theta_{T_\alpha}>0\ \} =$

$E^{\mu}[\ M_\alpha\leq T_\alpha<L_{\alpha+1},\ Q_s(Y_T,f)]$

qui est le côté droit de (18). Le théorème est établi.

DEUX CONSEQUENCES

1) <u>Les Q_t forment un semi-groupe</u> : $Q_s(x,Q_tf))=Q_{s+t}(x,f)$. Si $P^x\{\tau_0=0\}=0$, les deux membres valent $f(\partial)$. Sinon, le premier vaut

$$\frac{E^x[\ Q_t(Y_s,f),\tau_0=0]}{P^x\{\ \tau_0=0\ \}} = \frac{E^x[f\circ Y_{t+s}\ ,\tau_0=0]}{P\ \{\tau_0\ =\ 0\ \}} = Q_{s+t}(x,f)$$

(noter que τ_0 est $\underline{\underline{G}}_0$-mesurable).

2) Si $P^x\{\tau_0=0\}>0$, et si l'on munit Ω de la loi $Q^x=P^x\{.\mid\tau_0=0\}$, le processus (Y_t) est markovien, admet (Q_t) comme semi-groupe de transition et ε_x comme loi initiale. Cela tient encore au fait que τ_0 est $\underline{\underline{G}}_0$-mesurable.

Le théorème précédent n'est pas encore absolument satisfaisant. Une bonne partie de la théorie du potentiel repose en effet, non seulement sur la propriété de Markov forte, mais sur le théorème de HUNT (de continuité à droite des fonctions excessives sur les trajectoires) qui résulte de la propriété de Markov forte lorsque les fonctions excessives sont <u>presque-boréliennes</u> pour le processur (Y_t). Nous allons maintenant discuter ce point.

Nous désignons par U_p, U la résolvante et le potentiel de (P_t), par V_p, V la résolvante et le potentiel de (Q_t), par (K_t) le semi-groupe obtenu en tuant (P_t) à l'instant D_B, par W_p, W sa résolvante et son potentiel, par ϕ enfin la fonction $P^\bullet\{\tau_0=0\} = P^\bullet\{L_1>0\}$. L'événement $L_1=0$ se produit dans deux cas : si $D_A \geqq D_B$, ou encore si $D_A=0$ et s'il n'y a aucune rencontre de A entre 0 et D_B. Une petite discussion (suivant que $x \in A$ ou non, est régulier pour A ou non) montre que dans tous les cas $1-\phi(x)=P^x\{T_A \geqq D_B\}$, donc $\phi=P^\bullet\{T_A<D_B\}$ est excessive pour le semi-groupe (K_t). Nous pouvons donc aussi introduire le semi-groupe conditionné par ϕ ("ϕ path semigroup")

(21)
$$\begin{aligned} K_t^\phi(x,dy) &= \frac{1}{\phi(x)}K_t(x,dy)\phi(dy) \text{ si } \phi(x)>0 \\ &= \varepsilon_\partial(dy) \text{ sinon} \end{aligned}$$

Nous commençons par quelques calculs. On note f une fonction positive, et x est tel que $\phi(x)>0$. Nous avons

$$\{L^1>t\} = \{D_B>t \ , \ L_1\circ\theta_t>0\}$$

donc

(22)
$$\begin{aligned} K_t^\phi(x,f) &= \frac{1}{\phi(x)}E^x[f\circ X_t \phi\circ X_t \ , t<D_B] = \frac{1}{\phi(x)}E^x[f\circ X_t \ , t<D_B \ , L_1\circ\theta_t>0] \\ &= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\ f\circ X_t \ , t<L_1] \end{aligned}$$

(ceci a une signification probabiliste très simple : L_1 est un temps de retour - le dernier passage dans A - pour le processus tué en D_B). Nous avons d'autre part

(23)
$$Q_t(x,f) = \frac{1}{\phi(x)}E^x[f\circ Y_t, L_1>0]$$

donc en intégrant en t de 0 à $+\infty$

(24)
$$\begin{aligned} V(x,f) &= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\int_0^\infty f\circ Y_t dt \ , L_1>0] = \frac{1}{\phi(x)}E^x[\int_0^\infty f\circ X_{\tau_s} ds, L_1>0] \\ &= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\int_0^\infty f\circ X_s dH_s \ , L_1>0] \quad \text{si } f(\partial)=0 \\ &\leqq \frac{1}{\phi(x)} Uf(x) \text{ si } f(\partial)=0 \ . \end{aligned}$$

Ainsi , si Uf est finie et f nulle en ∂ , Vf est finie sur E (nulle dans $\{\phi=0\}$) et nulle en ∂ . Nous allons supposer pour commencer que U est un noyau propre sur E , choisir f nulle en ∂ telle que Uf soit finie, et montrer que Vf <u>est</u> (K_t^ϕ)-<u>excessive</u>. Il suffit évidemment de se placer sur $\{\phi>0\}$.

appliquons (23) en remplaçant f par Vf :

(25) $K_t^{\phi}(x,Vf) = \frac{1}{\phi(x)}E^x[Vf\circ X_t\phi\circ X_t,\ t<D_B]$ puis (24)

$$= \frac{1}{\phi(x)}E^x[t<D_B\ ,\ E^{X_t}[\int_0^{\infty} f\circ Y_s ds\ ,L_1>0]]$$

$$= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\ t<D_B,\ L_1\circ\theta_t>0,\ \int_0^{\infty} f\circ Y_s\circ\theta_t\ ds\ ]$$

$$= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\ t<L_1,\ \int_0^{\infty} f\circ Y_s\circ\theta_t\ ds\ ]$$

$$= \frac{1}{\phi(x)}E^x[\ t<L_1,\ \int_0^{\infty} f\circ Y_{t+s}\ ds\ ]$$

car si $t<L_1$ on a $t=\tau_t$. On remplace cette dernière intégrale par $\int_t^{\infty} f\circ Y_s\ ds$, et il devient évident, par comparaison avec l'expression (24) de Vf, que Vf est (K_t^{ϕ})-excessive.

[A vrai dire, le fait que les fonctions excessives pour (Q_t) soient aussi excessives pour un semi-groupe relativement simple est probablement plus intéressant que la propriété que nous cherchons à établir !]

Nous allons voir dans un instant que ϕ <u>est presque-borélienne pour (X_t) , et que toute fonction (K_t^{ϕ})-excessive est presque-borélienne pour</u> (X_t) .

Cela entraînera que Vf, puis (par un raisonnement simple) V_pf, est presque-borélienne pour le processus (X_t), et a fortiori pour (Y_t), qui s'en déduit par changement de temps. On sait que cela suffit à entraîner le théorème de HUNT, et le fait que toutes les fonctions (Q_t)-excessives sont presque-boréliennes pour (Y_t). Il reste à s'affranchir de l'hypothèse de transience faite sur (X_t) : à cet effet on remplace (P_t) par $e^{-\lambda t}P_t$, et on introduit le semi-groupe correspondant (Q_t^{λ}), qui ne vaut pas $e^{-\lambda t}Q_t$, mais dont la résolvante V_p^{λ} converge vers V_p lorsque $\lambda\to 0$: $V_p^{\lambda}f$ étant presque borélienne pour $(e^{-\lambda t}P_t)$, donc pour (P_t), il en est de même de V_pf.

Il reste donc seulement à prouver la phrase soulignée d'un trait interrompu. Le noyau $P_{T_B}^p$ transforme les fonctions p-excessives (pour (P_t) en fonctions p-excessives, donc presque-boréliennes. Le noyau $P_{D_B}^p$ possède alors la même propriété (il ne diffère du précédent que sur un ensemble semi-polaire. Cf.Meyer, processus de Markov, bas de la p.179). Alors, si f est positive $W_pf=U_pf-P_{D_B}^pU_pf$ est presque-borélienne. Les fonctions p-excessives pour le semi-groupe (K_t) sont donc presque-boréliennes pour (X_t), et cela s'applique en particulier à ϕ. Le passage à (K_t^ϕ) est alors immédiat.

Dans leur travail, KNIGHT et PITTENGER étudient aussi les propriétés de quasi-continuité à gauche du processus (Y_t), mais nous laisserons cela de côté ici.

BIBLIOGRAPHIE

F.B.KNIGHT et A.O.PITTENGER. Excision of a strong Markov process. à paraître dans le Z.für W-theorie.

REMARQUE

On n'a pas cherché ici à généraliser le théorème de KNIGHT et PITTENGER : il semble évident que l'on peut remplacer D_B par un temps terminal D, à condition que les A-excursions $[U,V[$ telles que $D\circ\theta_U < V$ ne puissent s'accumuler vers la gauche (i.e., forment un ensemble bien ordonné) : cette condition n'est pas facile à exprimer autrement. Ce n'est pas une généralisation très intéressante.

Par ailleurs, on ne peut sûrement pas enlever n'importe quel type d'excursions : par exemple, si B et C sont deux ensembles disjoints, et disjoints de A, J.WALSH m'a montré que le processus obtenu en excisant les excursions hors de A qui rencontrent B, puis C, ne peut être markovien. Intuitivement, une trajectoire du processus " opéré" qui à l'instant t est en cours d'excursion hors de A, a le droit de rencontrer C avant de revenir dans A si elle n'est pas passée par B, mais n'en a pas le droit si elle est passée par B entre le début de l'excursion et t.

P.A.Meyer
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7 rue René Descartes ,67-Strasbourg