NORIHIKO KAZAMAKI

Une note sur les martingales faibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 118-121
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__118_0>

UNE NOTE SUR LES MARTINGALES FAIBLES

N.Kazamaki

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace de probabilité complet et $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \in R_+}$ une famille croissante, continue à droite de sous - tribus de $\underline{\underline{F}}$ telle que $\underline{\underline{F}}_0$ contienne tous les ensembles négligeables de $\underline{\underline{F}}$.

DEFINITION.- Un processus $M = (M_t, \underline{\underline{F}}_t)$ à valeurs réelles et à trajectoires continues à droite est une martingale faible (resp. faiblement de carré intégr - able) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) et une suite de martingale uniformément intégrable (resp. de carré intégrable) (M_t^n) telles que

(a) $\lim T_n = +\infty$ p.s

(b) pour chaque n, on a $M_t = M_t^n$ sur l'ensemble $\{ t < T_n \}$.

Il existe une martingale faible, continue et bornée, qui n'est pas une martin - gale .[(2)]

Nous allons montrer ici qu'une martingale faible n'est pas nécessairement une martingale faiblement de carré intégrable .

Soient $\Omega = R_+$, $\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}$ la tribu borélienne de R_+, S l'application identité de Ω dans R_+ et $\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_t$ la tribu engendrée par $S \wedge t$. On prend pour probabilité P sur Ω la loi exponnentielle: $P(S > t) = e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$.
On considère la tribu $\underline{\underline{F}}$ engendrée par $\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}$ et les ensembles P - négligeables de et pour chaque t la tribu $\underline{\underline{F}}_t$ engendrée par $\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_t$ et les ensembles P - négligeables de Ω.

Nous utiliserons essentiallement le lemme suivant :

LEMME (Dellacherie (1)). - Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ si et seulement si elle vérifie la condition suivante : il existe $s \in \bar{R}_+$ tel que

$$(i) \qquad T \geqslant S \quad \text{p.s si } S \leqslant s$$

$$(ii) \qquad T = s \quad \text{p.s si } S > s \quad .$$

THEOREME .- Une martingale faible est une martingale .

DEMONSTRATION.- Soit $M = (M_t, \underline{\underline{F}}_t)$ une martingale faible . Pour simplifier, nous supposerons que chaque temps d'arrêt T_n est borné ; on a alors d'après le lemme

$$R_+ \ni \exists s_n \uparrow +\infty \ , \quad T_n = \begin{cases} \geqslant S & \text{p.s si } S \leqslant s_n \\ s_n & \text{p.s si } S > s_n \end{cases} .$$

Comme $M^n = (M_t^n, \underline{\underline{F}}_t)$ est une martingale , on a pour chaque n :

$$(s \leqslant t) \ , \quad M_s^n = E(M_t^n | \underline{\underline{F}}_s) = M_t^n I_{\{S \leqslant s\}} + E(M_t^n | \underline{\underline{F}}_s) I_{\{S > s\}}$$

et par conséquent $M_t^n = M_s^n$ si $S \leqslant s$. On a alors :

$$(1) \qquad M_t^n = M_{t \wedge S}^n \quad \text{p.s} \quad (\forall n , \forall t) \quad .$$

D'autre part , M_t^n (resp. M_t) est constante C_t^n (resp. C_t) réelle sur $\{S > t\}$, car elle est $\underline{\underline{F}}_t$- mesurable ; on peut écrire

$$M_t = M_S I_{\{S \leqslant t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$$

et aussi $\qquad M_t^n = M_S^n I_{\{S \leqslant t\}} + C_t^n I_{\{S > t\}}$. Evidemmemt M_S et M_S^n sont $\underline{\underline{F}}$ - mesurable . Pour tout $t < s_n$ on a $\{s_n < S\} \subset \{t < S\}$ et $T_n = s_n$ sur $\{s_n < S\}$.

Comme $M_t = M_t^n$ sur $\{s_n < S\}$, il est évident que pour chaque $t < s_n$ on a

$$M_t^n = M_S^n I_{\{S \leqslant t\}} + C_t I_{\{S > t\}},$$

et par conséquent :

$$\int_{]s,\infty[} M_t^n \, dP = \int_{]s,\infty[} M_s^n \, dP = C_s e^{-s} \qquad (s \leqslant t < s_n)$$

On en déduit :

$$(2) \qquad \int_{]s,t]} M_S^n \, dP = C_s e^{-s} - C_t e^{-t} \qquad (s \leqslant t < s_n)$$

Il en résulte que pour chaque k on a :

$$\int_{]s,t]} M_S^n I_{[o,s_n[} dP = \int_{]s,t]} M_S^{n+k} I_{[o,s_n[} dP \qquad \text{pour tout } (s,t) \text{ telle que } s \leqslant t$$

Autrement dit, on a : $M_S^n I_{[o,s_n[} = M_S^{n+k} I_{[o,s_n[}$ p.s : cela entraîne que si $t < s_n$

$$(3) \qquad M_S I_{\{S \leqslant t\}} = M_S^n I_{\{S \leqslant t\}} \; .$$

On a alors :

$$(4) \qquad M_t = M_t^n \quad \text{pour tout } t < s_n \; , \text{ et } \lim s_n = +\infty$$

Par conséquent, M est une martingale.

Egalement on peut vérifier qu'une martingale faiblement de carré integrable est une martingale de carré integrable.

Il est maintenant évident qu'une martingale faible n'est pas nécessairement une martingale faiblement de carré intégrable.

D'après (2) et (4), on peut vérifier facilement le resultat suivant.

COROLLAIRE .- Si pour chaque t l'application : $\omega \longrightarrow M_t(\omega)$ est continue à gauche , on a alors :

$$(5) \qquad M_S(\omega) = -\lim_{h \downarrow o} \frac{C_\omega - C_{\omega-h}\ e^h}{h} \qquad (\ \omega > o\ ) .$$

REMARQUE .- Une semi - martingale n'est pas nécessairement une martingale faible .

BIBLIOGRAPHIE

(1) C.DELLACHERIE : Un exemple de la théorie générale des processus . Séminaire de Probabilités lV , Université de Strasbourg . Lecture Notes in Mathematics vol.124 , Springer , Heidelberg 1970

(2) N.KAZAMAKI : Changes of time , Stochastic integrals and weak martingales . (à paraître dans le Zeitschrift für W-théorie) .