

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BRETAGNOLLE

***p*-variation de fonctions aléatoires. 1ère partie
: séries de Rademacher**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 51-63

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__51_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

p-VARIATION DE FONCTIONS ALÉATOIRES

1^{ère} partie: SÉRIES DE RADEMACHER

par Jean Bretagnolle

I. Introduction : Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, $[a, b]$ un intervalle (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$); on note $\mathcal{P}_{a,b}$ la famille des partitions finies de $[a, b]$, soit des $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k \mid k = k(P) \in \mathbb{N}; a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$, avec $t_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ suivant le cas; on définit alors, pour $p > 0$, la p -variation de f sur $[a, b]$, notée $W^p(f)_a^b$ par:

$$(I) \quad W^p(f)_a^b = \sup_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} \left\{ \sum_{t_i \in P; 0 \leq i < k(P)} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p \right\}.$$

Si la fonction n'est définie que sur $[a_0, b_0]$, on peut toujours la prolonger par constance et continuité en dehors de $[a_0, b_0]$, de sorte que la p -variation est définie pour tout couple a, b , avec $a < b$.

Dans cette première partie, on se donne une suite ε_i de Rademacher (variables indépendantes, $P\{\varepsilon_i = 1\} = P\{\varepsilon_i = -1\} = \frac{1}{2}$), une suite de réels a_i ($i \in \mathbb{N}$), et on définit la fonction aléatoire S par $S(n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varepsilon_i$; la p -variation de cette fonction est alors une v.a. et

Théorème 1 : si $p \in]0, 2[$, il existe une constante M_p , ne dépendant que de p , telle que:

$$\sum_{a < i < b} |a_i|^p \leq E\{ W^p(S)_a^b \} \leq M_p \cdot \left[\sum_{a < i < b} |a_i|^p \right].$$

Remarques : le résultat est faux pour $p=2$, comme on le verra dans la deuxième partie. Il est évident pour $0 < p < 1$, avec $M_p = 1$, car dans ce cas $|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p$, donc la partition qui réalise le sup est la partition certaine la plus fine possible. Donc dans la suite, $1 < p < 2$.

II. Notations et résultats préliminaires

- i, j, k, m, n, u, v , sont des entiers positifs ou nuls ;
- la notation $f(a, b, \dots) \lesssim g(a, b, \dots)$ signifie qu'il existe une constante C ne dépendant pas de $a, b, \dots$ telle que $f(a, b, \dots) \leq Cg(a, b, \dots)$ et $f \approx g$ que $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$. (les constantes peuvent dépendre de p)
- si M et N sont deux fonctions aléatoires définies sur le même espace de probabilité, on a l'inégalité

$$(W) : W^p(M+N)_a^b \text{ et } W^p(M+N)_a^b \lesssim W^p(M)_a^b + W^p(N)_a^b .$$

(pour chaque partition, on utilise terme à terme l'inégalité $|a+b|^p \leq 2^{p-1}[|a|^p + |b|^p]$, on prend le sup à droite, puis à gauche).

- Inégalités de Paul Lévy : les $a_i \varepsilon_i$ sont des v.a. symétriques, indépendantes, et si désormais on note S_i^j la quantité $S(j) - S(i)$, S_i^{*j} la quantité $\sup_{i < k \leq j} |S_i^k|$, on a les inégalités suivantes :

$$(P.L.1) : P\{S_i^{*j} > x\} \leq 2P\{|S_i^j| > x\} \quad \text{d'où}$$

$$(P.L.2) : E\{(S_i^{*j})^p\} \lesssim E\{|S_i^j|^p\} .$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchébichev : on l'utilisera sous la forme :

$$(B.T.) : P\{|S_i^j|^p > 2^v\} \leq \sum_{i < k \leq j} \omega_v(a_k), \text{ où } \omega_v(a) = \inf(a^2 2^{-2v/p}, 1)$$

où les ω ont les propriétés suivantes :

$$(\Omega.1) : \omega_v(a+b) \lesssim \omega_v(a) + \omega_v(b)$$

$$(\Omega.2) : \text{si } a \geq 1, \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \omega_v(a) \lesssim |a|^p$$

$$(\Omega.3) : \omega_v(a) \sim \omega_{v+1}(a) .$$

- En complétant éventuellement par des 0 la suite des a_i , $a_i < b$, on peut toujours supposer, ce qu'on fait dans la suite, que i varie entre 0 et 2^n pour un n de $\mathbb{N}$.

- L'inégalité fondamentale : Ecrivons maintenant W_i^j au lieu de $W^P(S)_i^j$

Les partitions de $[0, 2^n]$ étant en nombre fini, le sup dans la formule (I) est atteint par une partition aléatoire $P(\omega)$ dont je privilégie l'intervalle $t_g(\omega), t_d(\omega)$ contenant le milieu 2^{n-1} ($t_g < 2^{n-1} < t_d$) :

$$\text{ainsi } W_0^{2^n} = \sum_{0=s_0(\omega) < s_1(\omega) < \dots < s_k(\omega)=t_g(\omega)} |S_{s_i}^{s_{i+1}}|^p + |S_{t_g(\omega)}^{t_d(\omega)}|^p + \sum_{t_d(\omega)=t_0(\omega) < t_1(\omega) < \dots < t_m(\omega)=2^n} |S_{t_j}^{t_{j+1}}|^p = G(\omega) + |S_{t_g}^{t_d}|^p D(\omega)$$

Mais $G(\omega) + |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p \leq W_0^{2^{n-1}}$ et aussi $G(\omega) + \sum_{t_g}^{2^{n-1}} |a_i|^p \leq W_0^{2^{n-1}}$, puisque dans les deux cas il s'agit de partitions particulières de

$[0, 2^{n-1}]$; on a des inégalités semblables à droite et il vient:

$$(IIa) \quad W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n} \leq |S_{t_g}^{t_d}|^p - |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p - |S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p .$$

$$(IIb) \quad W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n} \leq |S_{t_g}^{t_d}|^p - \sum_{t_g}^{t_d} |a_i|^p .$$

L'idée de la démonstration est de découper le segment initial en 2 morceaux, puis en 4, etc, en majorant la somme des espérances des termes résiduels en utilisant soit (IIa) soit (IIb).

III. Un cas particulier : C'est celui où les a_i sont tous égaux à 1. Dans (IIa) on majore le membre de droite par $2^p [S_0^{*2}]^p$, dont l'espérance se majore, d'après (P.L.2), par $E\{|S_0^{*2}|^p\}$, ce dernier majoré par $2^{np/2}$ (pour une v.a. $\|X\|_p \leq \|X\|_2$ si $p \leq 2$). On a donc :

$E\{W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n}\} \lesssim 2^{np/2}$. Pour $n=0$, $W=1$; maintenant on découpe chaque moitié en deux, ..., au rang k on a 2^k termes correctifs, chacun majoré par $2^{(n-k)p/2}$, et donc

$$E\{W_0^{2^n}\} - 2^n \lesssim \sum_{1 \leq k \leq n} 2^k \cdot 2^{(n-k)p/2} \leq 2^n \cdot \sum_{v \geq 0} 2^{-v(1-p/2)}.$$

On a bien montré que pour $p < 2$, pour les a_i tous égaux (on passe de 1 à une valeur commune quelconque par homogénéité de la fonction puissance), il existe une constante C_p telle que

$$E\{W_0^{2^n}\} \leq C_p \cdot \sum_{0 \leq i < 2^n} |a_i|^p.$$

IV. Majoration dans le cas général : En fait, on suppose ici que les a_i sont positifs, ce qui n'est pas une limitation, et tous minorés par 1. Définissons maintenant la v.a. entière $\bar{T}$ par

$$\begin{aligned} \{\bar{T} = 2^n\} &= \{ |S_{2^{n-1}}^{2^n}|^p \geq 2^{n-2} \} \quad \text{sinon} \\ \{2^{n-1} < \bar{T} \leq m\} &= \bigcap_{m < j \leq 2^n} \{ |S_{2^{n-1}}^j|^p < \frac{1}{2}(j - 2^{n-1}) \} \quad \text{pour } 2^{n-1} < m < 2^n. \end{aligned}$$

$\bar{T}$ n'est pas un temps d'arrêt, c'est le dernier instant où une famille d'inégalités est vérifiée; $\bar{T}$ ne dépend que des ϵ_i d'indice $> 2^{n-1}$ et est en particulier indépendant de $\underline{T}$ défini par symétrie autour du milieu : $\{\underline{T}=0\} = \{ |S_0^{2^{n-1}}|^p \geq 2^{n-2} \}$, $\{m \leq \underline{T} < 2^{n-1}\} = \bigcap_{0 < j < m} \{ |S_j^{2^{n-1}}|^p \geq \frac{1}{2}(2^{n-1} - j) \}$ pour $0 < m < 2^{n-1}$, qui lui ne dépend que des 2^{n-1} premières Rademachers.

Notons C_n l'événement $\{\underline{T} > 0\} \cap \{\bar{T} < 2^n\}$, et V_n la quantité $W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n}$, dont on se propose d'évaluer l'espérance.

A. Evaluation de $E\{V_n \cdot 1_{C_n}\}$: reprenons le second membre de (IIb):
 $|S_{t_g}^{t_d}|^p - \sum_{t_g}^t a_i^p \leq 2[|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^{p-\frac{1}{2}}(t_d - 2^{n-1}) + |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^{p-\frac{1}{2}}(2^{n-1} - t_g)],$
 d'après l'inégalité $|a+b|^p \leq 2|a|^p + 2|b|^p$ et le fait que les a_i sont tous plus grands que 1; si $t_d > \bar{T}$, $|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^{p-\frac{1}{2}}(t_d - 2^{n-1}) \leq 0$, d'après la définition de $\bar{T}$, donc un majorant de cette quantité est toujours $|S_{2^{n-1}}^{*\bar{T}}|^p$, de même à gauche: on est ramené à l'évaluation de

$$E\{1_{C_n} \cdot |S_{2^{n-1}}^{*\bar{T}}|^p\}; \text{ pour ce terme droit, on majore } 1_{C_n} \text{ par } \Sigma 1_{B_k}, B_k = \{2^{2^{n-1}+2^k} \leq \bar{T} < 2^{2^{n-1}+2^{k+1}}\} \quad (0 \leq k \leq n-2);$$

- Sur B_k et $|S_{2^{n-1}}^{*\bar{T}}|^p \leq 2^{k+3}$, on majore ($\lesssim$) par $2^{kP}\{B_k\}$, mais B_k entraîne que $|S_{2^{n-1}+2^{k+1}}^{*\bar{T}}|^p \geq 2^{k-1}$ (sinon $\bar{T}$ déjà supposé inférieur à $2^{2^{n-1}+2^k}$, le serait aussi à $2^{2^{n-1}+2^{k+1}}$); en utilisant PL2 et BT on obtient la majoration

$$(1) \quad \Sigma_{k < n-1} 2^k \cdot \Sigma_{2^{2^{n-1}+2^k} \leq i \leq 2^{2^{n-1}+2^{k+1}}} \omega_k(a_i).$$

- Sur B_k et $|S_{2^{n-1}}^{*\bar{T}}|^p > 2^{k+3}$, si on appelle R_v le temps d'arrêt $R_v = \inf \{j \mid |S_{2^{n-1}}^j|^p > 2^v\}$, pour $v > k+3$ on a la chaîne d'implications : $B_k \cap \{|S_{2^{n-1}}^{*\bar{T}}|^p > 2^v\} \Rightarrow \{|S_{2^{n-1}+2^{k+1}}^{2^{n-1}+2^{k+1}}|^p < 2^k\} \cap \{R_v < 2^{2^{n-1}+2^{k+1}}\} \Rightarrow \{R_v < 2^{2^{n-1}+2^{k+1}}\} \cap \{|S_{R_v}^{2^{n-1}+2^{k+1}}|^p > 2^{v-1-2^k} \geq 2^{v-2}\}$ (en utilisant l'inégalité $|a-b|^p \geq \frac{1}{2}|a|^p - |b|^p$); pour évaluer la probabilité de ce dernier événement, on remarque que R_v et $S_{R_v}^{2^{n-1}+2^{k+1}}$ sont indé-

pendants: cette probabilité $P = \sum_m P\{R_v = m\} \cdot P\{|S_m^{2^{n-1}+2^{k+1}}|^p \geq 2^{v-2}\} \lesssim$

$$\sum_m P\{R_v = m\} \cdot \sum_{m+1 \leq j \leq 2^{n-1}+2^{k+1}} \omega_v(a_j) \quad (\text{d'après BT et } \Omega 3) =$$

$\sum_m \omega_v(a_{m+1}) \cdot P\{R_v \leq m\}$: on réutilise BT pour obtenir tout compte fait

$$(2) \sum_{k < n-1, k < v} 2^v \cdot \sum_{i \neq j, 2^{n-1} \leq i, j \leq 2^{n-1}+2^{k+1}} \omega_v(a_i) \omega_v(a_j) .$$

(Le point délicat était d'écarter en vue de la suite les termes car-
rés $i=j$). Naturellement, il faudra rajouter tout à l'heure les ter-
mes symétriques correspondant à $S_{t_g}^{2^{n-1}}$.

B. Evaluation de $E\{V_n \cdot 1_{C_n}\}$: on va supposer que $|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p \geq |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p$,

(on rétablira ensuite la symétrie) et utiliser (IIa) combinée avec

l'inégalité $|a+b|^p - |a|^p - |b|^p \lesssim |b| \cdot |a|^{p-1}$, si $|b| \lesssim |a|$.

- sur $|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p \leq 2^n$, on majore par $2^n \cdot P\{\bar{T} = 2^n\} + 2^n P\{\bar{T} = 0\}$ puisqu'on

est sur C_n' complémentaire de C_n , soit par $2^n \cdot \sum_i \omega_n(a_i)$

- sur $|S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p \leq 2^n$ et $|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p \in]2^v, 2^{v+1}]$, de probabilité majeure par $P\{|S_{2^{n-1}}^{*2^n}|^p > 2^v\}$, soit, d'après PL2 et BT, par

$$2^{n-1} \sum_{i \leq 2^{n-1}} \omega_v(a_i), \text{ par } 2^{n/p+v-v/p} \cdot \sum_i \omega_v(a_i) .$$

- sur $|S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p \in]2^k, 2^{k+1}]$ et $|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p \in]2^v, 2^{v+1}]$, avec $n \leq k < v$, et

on remarque que cet événement entraîne l'événement $|S_0^{*2^{n-1}}| \geq 2^n$ et

$|S_{2^{n-1}}^{*2^n}|^p \geq 2^n$, mais maintenant les deux facteurs sont indépendants,

on majore la probabilité par $\sum_{i \neq j} \omega_v(a_i) \omega_k(a_j)$, la valeur par $2^{k/p+v-v/p}$

C. Total général : Il vient en regroupant tous les termes:

Comme on rajoute au plus $2.2.\Sigma b_1^p$ termes égaux à 1, soit moins de $2^{n'+4}$, on complète par des 1 à la longueur $2^{n'+4}$; on notera dans la suite $\underline{B}$ (termes exceptionnels) l'image de B par ce plongement, en remplaçant par des 0 les 1 ajoutés: ainsi dans l'exemple, $\underline{B} = \{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 3^{1/p}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$; $\underline{B}$ désigne aussi les numéros d'ordre des termes exceptionnels: $\underline{B} = 2, 8, 17, 23$.

Propriétés de $C = \{c_j\}$: sa longueur est $2^{n'+4}$ ($0 \leq j \leq 2^{n'+4}$); $\sum_j c_j^p \in [2^{n'+4}, 2^{n'+5}]$, $c_j \geq 1$, et les valeurs exceptionnelles sont séparées au sens suivant:

si $j \in \underline{B}$, $A \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{|k-j| \leq A; k \neq j} c_k^p \lesssim A$, et donc $\sum_{|k-j| \leq A; k \neq j} c_k^2 \lesssim A^{2/p}$.

dém: la seconde vient de $\| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_p$ pour $p \leq 2$ dans ℓ^p ; la première de ce que deux valeurs exceptionnelles b_1^p et b_2^p , d'ordre approximatif 2^{k_1} et 2^{k_2} sont séparées par au moins $2^{k_1} + 2^{k_2}$ valeurs 1.

- Maintenant, on prend un paramètre u entier, aléatoire, équiréparti entre 1 et $2^{n'+4}$, et on construit la suite D^u , aléatoire, ainsi:

$d_i^u = c_{i+u}$ (modulo $2^{n'+4}$); alors $P_{\underline{u}} \{d_i^u = c_j\} = 2^{-n'-4}$, $\sum_i d_i^u = \sum_j c_j^p$, $d_i^u \geq 1$, et la séparation des valeurs exceptionnelles prend la forme suivante: pour tout $t \leq 2^{n'}$, tout $i \leq 2^{n'+4}$, tout A ,

$$1_{\{d_i^u = b_t\}} \cdot \sum_{|j-i| \leq A; j \neq i} |d_j^u|^2 \lesssim 1_{\{d_i^u = b_t\}} \cdot A^{2/p}.$$

On se donne maintenant des ε_i en nombre suffisant, indépendantes de l'aléatoire u , on note $S(A), S(B), S(C), S(D)$ les sommes des $a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon,$

de ε , et on a le

Lemme : Pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$E_u E_\varepsilon \{ W^p(S(D))_0^{2^{n'+4}} \} \lesssim 2^{n'+4}.$$

démonstration : Appelons $S(1)$ le processus des sommes partielles

des ε_i ; $S(A) = S(B-1)$ et donc d'après (W) de II,

$$E \{ W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E \{ W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \} + E \{ W^p(S(1))_0^{2^{n'}} \} \text{ soit, d'après le } \\ \text{résultat du paragraphe III, } E \{ W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E \{ W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \} + 2^{n'}.$$

Maintenant, en loi, la variation de 0 à $2^{n'}$ est la même que celle

de 0 à $2^{n'+4}$ du processus des sommes des $b_i \varepsilon_i$, les 0 intercalés n'

intervenant pas; mais $c_i = b_i + l_i$, ou $l_i = 0$ si $i \in B$, 1 sinon; les

0 intercalés dans l_i n'intervenant pas non plus; d'après le résultat

$$\text{de III, et (W): } E \{ W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E \{ W^p(S(C))_0^{2^{n'+4}} \} + 2^{n'+4}$$

- soit f une fonction définie sur $[0, a]$, b tel que $0 < b < a$, et $\underline{f}$ définie par $\underline{f}(i) = f(i+b \text{ modulo } a)$; comme on a les inégalités:

$$W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a \leq W^p(f)_0^a \lesssim W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a \quad (\text{la 2}^\circ \text{ conséquence de}$$

(W) appliquée aux restrictions de f à $[0, b]$ et $[b, a]$), comme

$$W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a = W^p(\underline{f})_{a-b}^a + W^p(\underline{f})_0^{a-b} \lesssim W^p(\underline{f})_0^a, \text{ on a } W^p(f)_0^a \lesssim$$

$W^p(\underline{f})_0^a$ - en posant $a = 2^{n'+4}$, $b = u$, nous pouvons affirmer que

$$\text{pour tout } u, E \{ W^p(S(C))_0^{2^{n'+4}} \} \lesssim E \{ W^p(S(D^u))_0^{2^{n'+4}} \} \quad (\text{ici } E_\varepsilon \text{ signifie}$$

espérance en les Rademacher ε_i). En prenant l'espérance en u , en

écrivant la chaîne d'inégalités démontrées plus haut, il vient sous

$$\text{l'hypothèse du lemme: } E \{ W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim 2^{n'+4} \lesssim 2^{n'}.$$

VI. Calcul final. : On pose $n'+4 = n$; puisque $d_i^u \geq 1$, on peut écrire pour chaque suite D^u les majorations (III) correspondant au découpage de $]A2^m, (A+1)2^m]$ en $]A2^m, A2^m+2^{m-1}]$ et $]A2^m+2^{m-1}, (A+1)2^m]$, ceci pour $0 \leq m \leq n$, $0 \leq A < 2^{n-m}$; la somme en A et m , sommée en u et multipliée par 2^{-n} (ce qui représentera E_u) majorera alors la quantité $E_u E_e \{ W^p(S(D^u))_0^{2^n} - \sum_{0 \leq i < 2^n} d_i^u P \}$ (car, pour $m = 0, W_A^{A+1} = d_{A+1}^u P$) et comme $\sum_i d_i^u P \lesssim 2^n$, compte tenu du lemme du paragraphe V, il suffit donc de montrer que 2^{-n} somme en A, m, u est majorée ($\lesssim$) par 2^n . si donc

$$\begin{aligned} P_{A,m}^u &= \sum_{k \leq m-1; |i-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}} 2^k \omega_k(d_i^u) , \\ Q_{A,m}^u &= \sum_{k \leq m-1; k \leq v; i \neq j; |i, j-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}} 2^v \omega_v(d_i^u) \omega_v(d_j^u) \\ R_{A,m}^u &= \sum_{m-1 \leq v; A2^m < i \leq (A+1)2^m} 2^{m/p+v-v/p} \omega_v(d_i^u) \\ S_{A,m}^u &= \sum_{m-1 \leq k \leq v; A2^m < i \neq j \leq (A+1)2^m} 2^{k/p+v-v/p} \omega_v(d_i^u) \omega_k(d_j^u) , \end{aligned}$$

il faut montrer que pour $Z = P, Q, R, S$, $\sum_{m \leq n; A \leq 2^{n-m}; 0 \leq u \leq 2^n} 2^{-n} Z_{A,m}^u =$

$$E_u \left\{ \sum_{m \leq n; A \leq 2^{n-m}} Z_{A,m}^u \right\} \lesssim 2^n .$$

Avant de commencer le calcul, introduisons un paramètre t qui numérote les valeurs exceptionnelles b_t de B ; rappelons que si $x \geq 1$ (c'est le cas pour les d_i^u et les b_t), $\omega_k(x) = x^2 2^{-2k/p} \wedge 1$ et $\sum_k \omega_k(x) 2^k \lesssim x^p$; comme $\sum_t b_t^p = \sum_{i \leq 2^n} d_i^p$, $b_i^p \lesssim 2^n$, $\sum_{k,t} 2^k \omega_k(b_t) \lesssim 2^n$; enfin, pour

$x > 0$, $a, b \in \mathbb{N}$, remarquons que $\sum_{a \leq b} 2^{xa} \lesssim 2^{xb}$ et que $\sum_{a \leq b} 2^{-xb} \lesssim 2^{xa}$.

-Termes de type P

comme $d_i^u \leq 1 + \sum_t 1_{\{d_i^u = b_t\}} b_t$, d'après $\Omega.1 E_u \{\omega_k(d_i^u)\} \lesssim \omega_k(1) + 2^{-n} \sum_t \omega_k(b_t)$ puisque $P_u \{d_i^u = b_t\} = 2^{-n}$; m et A étant fixés, il y a 2^{n-m} tran-

ches disjointes de longueur 2^{k+1} pour la variable i ; s'introduit donc

devant chaque i un facteur 2^{k+1} , et, le E_u étant indépendant de i variant de 1 à 2^n , A variant de 0 à 2^{n-m} , une fois sommé en i et A ,

$$\begin{aligned} E_u \{\Sigma\} &\lesssim 2^{k+n-m} \sum_{k \leq m \leq n} 2^k [\omega_k(1) + 2^{-n} \sum_t \omega_k(b_t)] ; \\ \Sigma_m &\text{ donne } \lesssim 2^{n+k-k+k} [\omega_k(1) + 2^{-n} \sum_t \omega_k(b_t)] \\ \Sigma_k &\text{ donne } \lesssim 2^n [1 + 2^{-n} \sum_t b_t^{\frac{p}{t}}] \\ \text{or } \Sigma_t b_t^p &\lesssim 2^n \text{ donc } \boxed{\lesssim 2^n} . \end{aligned}$$

-Termes de type Q

dans Q , comme il y a symétrie entre i et j distincts, on écrit

$$\omega_v(d_i^u) \omega_v(d_j^u) \lesssim \omega_v(1)^2 + \sum_t 1_{\{d_i^u = b_t\}} \omega_v(b_t) \omega_v(d_j^u);$$

Le premier terme ne dépend pas de u , donc E_u est sans objet; les autres paramètres étant fixés, Σ fait apparaître un facteur $\lesssim 2^{2k}$; $i \neq j$

Σ un facteur 2^{n-m} ; reste donc :

$$\begin{aligned} \overbrace{\sum_{k \leq m \leq n; k \leq v}^A} & 2^{2k+n-m+v} [\omega_v(1)^2 = 2^{-4v/p}]; \quad \Sigma \text{ donne } \lesssim 2^{2k+n-m+k-4k/p}; \\ & \Sigma \text{ donne } \lesssim 2^{2k+n-k+k-4k/p} \end{aligned}$$

$$\Sigma_k \text{ donne } \lesssim \boxed{2^n} \text{ puisque } 2-4/p < 0 .$$

Le deuxième terme : $\sum_t 1_{\{d_i^u = b_t\}} \omega_v(b_t) \omega_v(d_j^u) \lesssim \sum_t 1_{\{d_i^u = b_t\}} \omega_v(b_t) 2^{-2v/p} d_j^{u2}$

et en appliquant la propriété de séparation de la fin de la page 8,

comme $\{j \mid |j-i-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}\} \subset \{j \mid |j-i| \leq 2^{k+2}\}$, on a

$$\sum_{i,j,t \text{ tels que } |j-i-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}} 1_{\{d_i^u=b_t\}} \omega_v(b_t) \omega_v(d_j^u) \lesssim$$

$$\sum_{i,t \text{ tels que } |i-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}} 1_{\{d_i^u=b_t\}} \omega_v(b_t) 2^{-2v/p+2k/p} ; \text{ soit}$$

$$E_u\{\Sigma\} \lesssim \sum_{t; A \leq 2^{n-m}; k \leq m \leq n; k \leq v; |i-A2^m-2^{m-1}| \leq 2^{k+1}} 2^{v-n+2(k-v)/p} \omega_v(b_t)$$

Σ introduit le facteur 2^{k+1} ; Σ introduit le facteur 2^{n-m} ;
 Σ donne $\lesssim 2^{v-2v/p+2k/p} \omega_v(b_t)^A$;
 Σ donne $\lesssim 2^v \omega_v(b_t)$; Σ donne b_t^p donc enfin $\Sigma \lesssim 2^n$.

Termes de type R : Quand A varie, les paquets étant disjoints, Σ se transforme en $\Sigma_{0 \leq i \leq 2^n}$; Σ donne $\lesssim 2^v \omega_v(d_i^u)$; Σ donne $\lesssim (d_i^u)^{A/p}$;
 Σ donne $\lesssim 2^n$, donc aussi $E_u \lesssim 2^n$.

Termes de type S : Si on somme d'abord en A, les paquets étant dis-joints, on majore en sommant sur $|j-i| \leq 2^{m+1}$; on écrit ici encore

$\omega_v(d_i^u) \lesssim \omega_v(1) + 1_{\{d_i^u=b_t\}} \omega_v(b_t)$, en séparant les deux termes :

pour le premier terme, il faut évaluer

$E_u\{ \sum_{m \leq n; m-1 \leq k \leq v; j \neq i; |j-i| \leq 2^{m+1}} 2^{k/p+v-v/p} \omega_v(1) \omega_k(d_j^u) \} ;$

Σ donne $\lesssim 2^{m+k/p+v-v/p} \omega_k(d_j^u) \cdot [\omega_v(1)=2^{-2v/p}]$;
 Σ donne $\lesssim 2^{m+k/p+k-k/p-2k/p} \omega_k(d_j^u)$ puisque $1-3/p < 0$;
 Σ donne $\lesssim 2^{2k-2k/p} \omega_k(d_j^u) \lesssim 2^k \omega_k(d_j^u)$ puisque $2-2/p < 1$;
 Σ donne $\lesssim d_j^u p$, Σ donne $\lesssim 2^n$, donc $E_u \lesssim 2^n$.

dans le deuxième terme, on majore $\omega_k(d_j^u)$ par $2^{-2k/p} (d_j^u)^2$, et, (en-

core la séparation des valeurs exceptionnelles) $\sum_{|j-i| \leq 2^m} 1_{\{d_i^u = b_t\}} \omega_k(d_j^u)$
 par $(\lesssim) 1_{\{d_i^u = b_t\}} 2^{2m/p-2k/p}$; reste à évaluer:

$$E_u \{ \overbrace{2^{k/p+v-v/p+2m/p-2k/p} \cdot 1_{\{d_i^u = b_t\}} \omega_v(b_t)}^{m < n; m-1 < k < v; 0 < i < 2^n; t} \} ;$$

E_u donne $2^{-n+v-v/p+2m/p-k/p} \omega_v(b_t)$; Σ introduit le facteur 2^n ;

Σ donne $\lesssim 2^{v-v/p+k/p} \omega_v(b_t)$; Σ_i donne $\lesssim 2^v \omega_v(b_t)$;

$$\Sigma_v \text{ donne } \lesssim b_t^p \quad \Sigma_t \text{ donne } \lesssim \boxed{2^n} .$$

La démonstration du théorème est terminée (l'inégalité de gauche est évidente, $\Sigma |a_i|^p$ étant atteinte par la partition la plus fine possible) .