

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Les résultats récents de Burkholder, Davis et Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 151-158

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__151_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__151_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES RÉSULTATS RÉCENTS DE BURKHOLDER, DAVIS ET GUNDY

par P.A.Meyer

1. NOTATIONS, ENONCE DES DEUX THEOREMES PRINCIPAUX

$(\Omega, \underline{F}, P)$ désigne un espace probabilisé, muni d'une famille croissante $(\underline{F}_n)$ de tribus. Martingales et temps d'arrêt seront relatifs à cette famille. Nous désignerons en général les processus par une lettre majuscule $X=(X_n)$, et nous utiliserons la même lettre minuscule pour les différences

$$x_0 = X_0, \quad x_n = X_n - X_{n-1}$$

Nous poserons alors : $X_n^* = \sup_{m \leq n} |X_m|$, $X^* = \sup_m |X_m|$, $x_n^* = \sup_{m \leq n} |x_m|$,
 $x^* = \sup_m |x_m|$,

$$Q_n(X) = \left(\sum_{m \leq n} x_m^2 \right)^{1/2}, \quad Q(X) = \left(\sum_m x_m^2 \right)^{1/2}$$

Φ est une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\Phi(0)=0$; nous supposerons de manière essentielle que Φ satisfait à la condition de "croissance modérée" $\Phi(2t) \leq \Lambda \Phi(t)$.

GUNDY, DAVIS et BURKHOLDER ont démontré, entre autres, les résultats suivants:

THEOREME 1. Soit (B_n) un processus croissant, non nécessairement adapté à la famille $(\underline{F}_t)$. Posons

$$a_0 = 0, \quad a_n = E[b_n | \underline{F}_{n-1}], \quad A_n = \sum_{m \leq n} a_m$$

On a alors $E[\Phi \circ A_\infty] \leq \Theta E[\Phi \circ B_\infty]$, où la constante Θ ne dépend que du coefficient de croissance Λ .

THEOREME 2. Soit X une martingale. Alors

$$\Theta E[\Phi \circ Q(X)] \leq E[\Phi \circ X^*] \leq \Theta' E[\Phi \circ Q(X)]$$

où Θ et Θ' ne dépendent que de Λ .

Ce sont des résultats extraordinaires. Malheureusement, l'article GDB n'est pas d'un abord spécialement aisé. En effet, on y établit des résultats beaucoup plus généraux que le théorème 2, de sorte qu'en plus de leurs difficultés propres, les démonstrations y sont recouvertes d'une épaisse couche d'axiomatique. C'est d'ailleurs là la seule justification de cet exposé : ayant vu ce qui se passe dans le cas particulier

le plus intéressant, le lecteur aura certainement beaucoup moins de mal à comprendre les articles [1] et [2], qui méritent de toute façon une lecture approfondie.

2. QUELQUES REMARQUES D'ORDRE ANALYTIQUE

a) Notons ϕ la dérivée à droite de la fonction convexe Φ ; c'est une fonction croissante et continue à droite, et on a

$$(1) \quad \phi(2t) \leq \frac{1}{2t} \int_{2t}^{4t} \phi(s) ds \leq \frac{1}{2t} \Phi(4t) \leq \frac{\Lambda^2}{2t} \Phi(t) = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) ds \leq \frac{\Lambda^2}{2} \phi(t)$$

On en déduit aussitôt que pour tout a on a une majoration de la forme $\phi(at) \leq m(a)\phi(t)$.

Il faut noter aussi que Φ est suradditive

$$(2) \quad \Phi(x+y) = \int_0^x \phi(s) ds + \int_x^{x+y} \phi(s) ds \geq \int_0^x \phi(s) ds + \int_0^y \phi(s) ds = \Phi(x) + \Phi(y)$$

Tandis qu'on a inversement

$$(3) \quad \Phi(x+y) \leq \Lambda \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \Lambda \frac{\Phi(x) + \Phi(y)}{2}$$

b) Les lemmes suivants sont tout simples. On les démontrera en appendice. On note h un nombre >1 .

LEMME 1. Soit $\Psi(n)$ une fonction positive définie sur $\mathbb{Z}$, telle que $\sum_{n=-\infty}^0 \Psi(n) < \infty$. Soit $U = \{n : \Psi(n) < h\Psi(n+1)\}$. Alors

$$(4) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi(n) \leq \frac{h}{h-1} \sum_U \Psi(n+1)$$

LEMME 1'. Soit $\Psi(t)$ une fonction positive localement bornée sur $\mathbb{R}$, telle que $\int_{-\infty}^0 \Psi(s) ds < \infty$. Soit $U = \{t : \Psi(t) < h\Psi(t+1)\}$. Alors

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(s) ds \leq \frac{h}{h-1} \int_U \Psi(s+1) ds$$

c) Le calcul suivant sera essentiel pour la démonstration du théorème 2. Soit Y une variable aléatoire positive. Nous avons

$$E[\Phi \circ Y] = E\left[\int_0^Y \phi(s) ds\right] = \int_0^\infty \phi(s) P\{Y > s\} ds$$

Mais en réalité nous n'aurons pas besoin de connaître $P\{Y > s\}$ pour toutes les valeurs de s pour majorer le premier membre. Soit h un nombre >1 . Posons $a = h^2 m(h)$ [la fonction m est définie à la ligne 9], et soit B l'ensemble légèrement bizarre

$$(6) \quad B = \{s : P\{Y \geq s\} \leq aP\{Y \geq hs\}\}$$

Alors

$$(7) \quad E[\Phi \circ Y] \leq \frac{a}{h-1} \int_B \phi(s) P\{Y > s\} ds$$

DEMONSTRATION. On applique le lemme 1'. Dans l'intégrale donnant $E[\Phi \circ Y]$ faisons le changement de variable $s = h^t$; cette intégrale s'écrit alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt$, avec $\psi(t) = \log(h) \phi(h^t) h^t P\{Y > h^t\}$. Le lemme 1' nous donne alors

$$E[\Phi \circ Y] \leq \frac{h}{h-1} \int_U \psi(t+1) dt \leq \frac{h^2 m(h)}{h-1} \int_U \psi(t) dt, \text{ et lorsque } t \text{ appartient à } U$$

h^t appartient à B .

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

La démonstration qu'en donnent BGD ne repose pas sur les idées précédentes, mais sur le lemme 1 et un procédé de "discrétisation". Le lecteur qui préfère garder le fil des idées fera donc bien de passer directement au n°4.

Nous désignons par Θ , dans toute cette démonstration, une quantité qui varie de place en place, mais ne dépend que de Λ . Nous écrivons Λ au lieu de Λ_∞ . Nous partons de

$$(8) \quad \begin{aligned} E[\Phi \circ A] &= \int_0^\infty \phi(s) P\{A > s\} ds = \sum_j \int_{2^j}^{2^{j+1}} \dots \leq \sum_j P\{A > 2^j\} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi(s) ds \\ &= \sum_j P\{A > 2^j\} (\Phi(2^{j+1}) - \Phi(2^j)) \leq (\Lambda - 1) \sum_j P\{A > 2^j\} \Phi(2^j) \end{aligned}$$

Désignons cette somme par S , et son terme général par $\psi(j)$. La suradditivité de Φ entraîne aussitôt que

$$(9) \quad \Phi(t) + \Phi\left(\frac{t}{2}\right) + \Phi\left(\frac{t}{4}\right) \dots \leq \Phi(2t)$$

de sorte que le lemme 1 s'applique à ψ . D'après le lemme 1, nous pouvons remplacer S par $2 \sum_{j \in U} \psi(j+1) \leq \Theta \sum_{j \in U} P\{A > 2^{j+1}\} \Phi(2^j)$.

Nous considérons maintenant les ensembles $K_j = \{A > 2^j\}$, et $H_j = \{A > 2^{j+1}, a^* < 2^{j-1}\}$. Le fait que $j \in U$ signifie que

$$(10) \quad \Phi(2^j) P\{A > 2^j\} \leq 2 \Phi(2^{j+1}) P\{A > 2^{j+1}\} \text{ et par conséquent } P(K_{j+1}) \geq \Theta P(K_j)$$

Nous coupons maintenant la somme en deux morceaux : le premier est formé des $j \in U_1$, i.e. les $j \in U$ pour lesquels

$$(11) \quad P\{A > 2^{j+1}\} = P(K_{j+1}) \leq 2 P\{A > 2^{j+1}, a^* < 2^{j-1}\} = P(H_j)$$

le second est formé des $j \in U$ pour lesquels cette condition n'a pas lieu. Comme K_{j+1} est contenu dans la réunion de H_j et de $\{a^* \geq 2^{j-1}\}$, on a pour les indices j du second morceau

$$(12) \quad P(K_{j+1}) \leq 2 P\{a^* \geq 2^{j-1}\}$$

On majore les deux morceaux séparément, en commençant par le plus facile
SECONDE SOMME. Elle est majorée par

$$(13) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^j) P\{a^* \geq 2^{j-1}\} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P\{2^j > a^* \geq 2^{j-1}\} [\phi(2^j) + \phi(2^{j-1}) + \dots]$$

D'après (9) cette somme est $\leq \phi(2^{j+1}) \leq \theta \phi(2^{j-1})$, et il reste la somme

$\sum P\{2^j > a^* \geq 2^{j-1}\} \phi(2^{j-1}) \leq E[\phi \circ a^*]$. Nous majorons très grossièrement $\phi \circ a^*$ par $\sum \phi \circ a_n$, puis nous appliquons l'inégalité de JENSEN (convexité de ϕ) pour obtenir le majorant $\sum E[\phi \circ b_n]$, et enfin la suradditivité pour obtenir $E[\phi \circ B_\infty]$. La seconde somme est convenablement majorée.

PREMIERE SOMME. $\sum_{j \in U_1} \phi(2^{j+1}) P\{A > 2^{j+1}\} \leq 2 \sum_{j \in U_1} \phi(2^{j+1}) P(K_j)$. On peut remplacer $\phi(2^{j+1})$ par $\phi(2^j)$ si on le désire.

Introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$S_j = \inf \{ n : A_n > 2^j \text{ ou } a_{n+1} > 2^{j-1} \}$$

$$T_j = \inf \{ n : A_n > 2^{j+1} \text{ ou } a_{n+1} > 2^{j-1} \}$$

On a $S_j \leq T_j \leq S_{j+1}$. Posons aussi

$$(14) \quad A_{T_j} - A_{S_j} = A^j, \quad B_{T_j} - B_{S_j} = B^j.$$

Sur K_j^c on a $A_\infty \leq 2^j$, donc $S_j = T_j$ et A^j et $B^j = 0$.

Sur $H_j \subset K_j$ on a $A_\infty > 2^{j+1}$, et $a^* < 2^{j-1}$. La seconde condition de définition de S_j et T_j ne joue pas, S_j et T_j sont finis tous deux et différents, et on a $A_{S_j} \leq 2^j + a^* \leq 2^j + 2^{j-1}$, $A_{T_j} \geq 2^{j+1}$, donc $A^j \geq 2^{j-1}$. On a d'autre part $E[B^j] = E[A^j] \geq 2^{j-1} P(H_j)$.

Soit κ la tribu $\{K_j, K_j^c\}$; comme $B^j = 0$ sur K_j^c

$$(15) \quad E[B^j | \kappa] = \frac{E[B^j] I_{K_j}}{P(K_j)} \geq 2^{j-1} \frac{P(H_j) I_{K_j}}{P(K_j)}$$

Nous utilisons maintenant le fait que $j \in U_1$: d'après (11), $P(H_j) \geq \frac{1}{2} P(K_{j+1})$ d'après (10), $P(K_{j+1}) \geq \theta P(K_j)$. Mettant tout ensemble

$$(16) \quad E[B^j | \kappa] \geq \theta 2^j I_{K_j}$$

Appliquons Jensen, notons que $\phi(\theta x)$ peut être remplacé par $\theta \phi(x)$:

$$(17) \quad E[\phi \circ B^j | \kappa] \geq \theta \phi(2^j) I_{K_j}$$

On intègre et on somme sur U_1 . Au second membre on a la somme cherchée. Au premier membre, $E[\sum_{j \in U_1} \phi \circ B^j] \leq E[\phi \circ B_\infty]$ par suradditivité. C'est fini.

4. LE THEOREME 2 : MARTINGALE A SAUTS BORNES

Ce cas renferme l'essentiel de la démonstration. Nous nous donnons deux nombres $a > 0$, $h > 1$, une martingale X telle que

$$(18) \quad x^* \leq d$$

et nous posons $V(X) = Q(X) \vee X^*$, $V_n(X) = Q_n(X) \vee X_n^*$. La majoration essentielle est le lemme suivant :

LEMME 2. Il existe des constantes θ (dépendant seulement de Λ, a, h) telles que l'on ait

$$(19) \quad P\{V(X) > t\} \leq \frac{\theta P\{X^* > t\} + \theta P\{\theta x^* > t\}}{\theta P\{Q(X) > t\} + \theta P\{\theta x^* > t\}}$$

pour tous les $t \geq d$ tels que

$$(20) \quad P\{V(X) > t\} \leq a P\{V(X) > ht\}$$

DEMONSTRATION. Nous démontrerons la première ligne, par exemple. Introduisons la constante $c = \frac{h-1}{2}$ et remarquons que l'ensemble $\{V(X) > ht\}$ est contenu dans la réunion de $\{V(X) > ht, x^* \leq ct\}$ et de $\{x^* > ct\}$. On a donc l'une des deux inégalités

$$P\{V(X) > ht\} \leq 2P\{x^* > ct\}$$

$$P\{V(X) > ht\} \leq 2P\{V(X) > ht, x^* \leq ct\}$$

Pour les t de la première classe, (19) est déjà toute démontrée. Les seuls t dont nous allons nous occuper sont donc les t de la seconde classe satisfaisant à (20), t pour lesquels on a l'inégalité

$$(21) \quad P\{V(X) > t\} \leq 2a P\{V(X) > ht, x^* \leq ct\} \quad (\text{et } t \geq d)$$

et on va montrer que pour ceux là

$$(22) \quad P\{V(X) > t\} \leq \theta P\{X^* > t\}$$

Comment va t'on faire ? DGB utilisent l'ingénieux petit lemme suivant, dont la démonstration est en appendice.

LEMME 3. Soient H un ensemble, u une fonction positive. Les inégalités $\int_H u \geq 2\ell P(H)$, $\int_H u^2 \leq m^2 P(H)$ entraînent $P\{u > \ell\} \geq \frac{\ell^2}{4m^2} P(H)$.

Posons

$$(23) \quad S = \inf \{ n : V_n(X) > t \}$$

$$T = \inf \{ n : V_n(X) > ht \}$$

Nous introduisons les deux martingales X^T et X^S arrêtées à S et T , et la martingale $Y = X^T - X^S$. L'ensemble H du lemme sera $\{S < \infty\} = \{V(X) > t\}$, et la fonction u du lemme sera Y^{*2} .

Sur l'ensemble de droite de (21), , nous avons $T < \infty$ et

$$ht \leq V_T(X) = V(X^T) = V(X^S + Y) \leq V(X^S) + V(Y) \leq t + ct + V(Y)$$

d'où par différence $V(Y) \geq ht - t - ct = ct$. Sur l'ensemble de droite de (21) nous avons donc $V(Y) \geq ct$, et cela entraîne, pour les t "intéressants" qui satisfont à (21)

$$(24) \quad P\{V(X) > t\} \leq 2aP\{V(Y) \geq ct\}$$

Nous obtenons la première inégalité du lemme 3 en écrivant que Y^* et $Q(Y)$ ont des normes comparables dans L^2 (inégalité de DOOB). Comme $Y^* = 0$ sur $\{S = \infty\}$,

$$(25) \quad \int_{\{S < \infty\}} Y^{*2} = \int Y^{*2} \geq 2QE[V(Y)^2] \geq 2Q(ct)^2 P\{V(Y) \geq ct\} \\ \geq 2Q(ct)^2 P\{V(X) > t\} = 2Q(ct)^2 P\{S < \infty\} \quad (\ell = Q(ct)^2)$$

Pour avoir la seconde inégalité, nous remarquons que pour $n < T$ on a $V_n(X) \leq ht$, donc $X_n^* \leq ht$, et comme $t \geq d$ (l'hypothèse est utilisée pour la première fois) on a $X_n^* \leq (h+1)t$ pour $n \leq T$. On a naturellement le même résultat pour $n \leq S$, et par différence $Y^* \leq 2(h+1)t$. Par conséquent

$$(26) \quad \int_{\{S < \infty\}} Y^{*4} \leq (2(h+1)t)^4 P\{S < \infty\} \quad (m = 4(h+1)^2 t^2)$$

Le lemme 3 nous donne alors $P\{Y^{*2} \geq Qc^2 t^2\} \geq \frac{\ell^2}{4m^2} P\{S < \infty\}$, ou en changeant de notation $P\{Y^* \geq Qct\} \geq QP\{V(X) > t\}$. Mais on a évidemment $Y^* \leq 2X^*$, de sorte que l'on a aussi

$$P\{X^* \geq Qct\} \geq QP\{V(X) > t\}$$

c'est à dire (22) aux notations près. L'autre inégalité se prouverait de même, en prenant dans le lemme 3 $u = Q(Y)^2$ au lieu de Y^{*2} .

Nous n'appliquerons pas le lemme 2 directement, mais plutôt la petite extension que voici :

LEMME 4. Soit X une martingale telle que l'on ait pour tout n

$$(27) \quad |x_n| \leq w_n$$

où w_n est une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. Alors on a

$$(28) \quad P\{V(X) > t\} \leq QP\{QX^* > t\} + QP\{Qw^* > t\} \\ QP\{QQ(X) > t\} + QP\{Qw^* > t\}$$

pour tous les t tels que

$$(29) \quad P\{V(X) > t\} \leq aP\{V(X) > ht\}$$

DEMONSTRATION. Suivant un raisonnement familier, nous partageons les t en deux classes. D'abord ceux pour lesquels on a

$$(30) \quad P\{V(X) > t\} \leq 2aP\{w^* > t\}$$

Pour ceux ci, les inégalités (27) sont triviales. Les t intéressants sont donc ceux qui satisfont à (29) mais non à (30), et pour ceux là on a

$$(31) \quad P\{V(X) > t\} \leq 2aP\{V(X) > ht, w^* \leq t\}$$

Introduisons le temps d'arrêt

$$T = \inf \{ n : w_{n+1} > t \}$$

et la martingale $Y = X^T$, dont les sauts sont bornés par t . Nous avons

$$(32) \quad P\{V(Y) > t\} \leq P\{V(X) > t\} \leq 2aP\{V(X) > ht, w^* \leq t\} \quad (31)$$

$$= 2aP\{V(X) > ht, T = \infty\} \leq 2aP\{V(Y) \geq ht\}$$

ainsi, t satisfait à (20) relativement à Y , avec seulement $2a$ au lieu de a . Le lemme 2 nous donne alors

$$(33) \quad P\{V(Y) > t\} \leq \Theta P\{\Theta Y^* > t\} + \Theta P\{\Theta y^* > t\} \quad (\text{de même pour l'autre inégalité})$$

Nous avons d'autre part $P\{V(X) > t\} \leq P\{V(Y) > t\} + P\{T < \infty\} = P\{V(X) > t\} + P\{w^* > t\}$.
D'où

$$(34) \quad P\{V(X) > t\} \leq \Theta P\{\Theta Y^* > t\} + \Theta P\{\Theta y^* > t\} + P\{w^* > t\}$$

On majore Y^* par X^* , y^* par w^* , et c'est fini.

5. FIN DE LA DEMONSTRATION : DECOMPOSITION DE DAVIS

Nous prenons maintenant une martingale quelconque X . Nous posons $x_{-1}^* = 0$ et

$$(35) \quad j_n = x_n I_{\{|x_n| \leq 2x_{n-1}^*\}} \quad j_0 = 0$$

$$k_n = x_n I_{\{|x_n| > 2x_{n-1}^*\}} \quad k_0 = x_0$$

Nous posons $J_n = j_0 + \dots + j_n$, $K_n = k_0 + \dots + k_n$; puis nous compensons ces deux processus :

$$(36) \quad \tilde{J}_n = E[j_1 | \mathcal{F}_0] + \dots + E[j_n | \mathcal{F}_{n-1}], \quad \tilde{K}_n = E[k_1 | \mathcal{F}_0] + \dots + E[k_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$Y_n = J_n - \tilde{J}_n, \quad Z_n = K_n - \tilde{K}_n$$

On a $X = Y + Z$, ces deux processus sont des martingales. Cette décomposition a été introduite par DAVIS dans [3]. Quelles sont ses propriétés ?

Tout d'abord, sur l'ensemble où $|x_n| > 2x_{n-1}^*$ on a $|x_n| + 2x_{n-1}^* \leq 2|x_n| = 2x_n^*$, donc $|x_n| \leq 2(x_n^* - x_{n-1}^*)$. En sommant

$$(37) \quad \sum |k_n| \leq 2x^*$$

Tandis que l'on a $|j_n| \leq x_{n-1}^*$ et $|\tilde{j}_n| \leq x_{n-1}^*$, donc $|y_n| \leq 2x_{n-1}^*$.

Nous avons $Q(Z) \leq \sum (|k_n| + |\tilde{k}_n|)$, et le même résultat pour Z^* . Donc

$$E[\phi \circ V(Z)] \leq E[\phi(\sum |k_n| + \sum |\tilde{k}_n|)] \leq \mathbb{Q}E[\phi(\sum |k_n|) + \phi(\sum |\tilde{k}_n|)]$$

Nous appliquons le théorème 1 : $E[\phi(\sum |\tilde{k}_n|)] \leq \mathbb{Q}E[\phi(\sum |k_n|)]$, et nous avons enfin

$$(38) \quad E[\phi \circ V(Z)] \leq \mathbb{Q}E[\phi \circ X^*] \leq \mathbb{Q}E[\phi \circ Q(X)] \\ \leq \mathbb{Q}E[\phi \circ X^*]$$

Nous appliquons à Y le lemme 4 et le calcul du n°2, c). Il vient

$$(39) \quad E[\phi \circ V(Y)] \leq \mathbb{Q}E[\phi \circ Y^*] + \mathbb{Q}E[\phi \circ X^*] \\ \leq \mathbb{Q}E[\phi \circ Q(Y)] + \mathbb{Q}E[\phi \circ X^*]$$

(38) permet, par différence, de majorer $E[\phi \circ Y^*]$ en fonction de $E[\phi \circ X^*]$ et $E[\phi \circ Q(Y)]$ en fonction de $E[\phi \circ Q(X)]$. On regroupe enfin (38) et (39) et la démonstration est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. D.L.BURKHOLDER et R.F.GUNDY . Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta.Math., 124, 1970, 249-300
- [2]. D.L. BURKHOLDER, B.J.DAVIS et R.F.GUNDY. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. 6-th Berkeley Symposium (à paraître).
- [3]. B.J.DAVIS. On the integrability of the martingale square function. Israel J.Math. 8, 1970, 187-190.

APPENDICE : DEMONSTRATION DES PETITS LEMMES

Les lemmes 1 et 1' se démontrent de la même manière. Démontrons par exemple 1'. On commence par le cas où $\int \psi(t)dt < \infty$ et on écrit

$$\int \psi(s)ds = \int \psi(s+1)ds = \int_U \psi(s+1)ds + \int_{U^c} \psi(s+1)ds \leq \int_U \psi(s+1)ds + \int_{U^c} \frac{\psi(s)}{h}ds \\ \leq \int_U \psi(s+1)ds + \frac{1}{h} \int \psi(s)ds \text{ et le résultat par différence. On}$$

traite le cas général en appliquant ce résultat à $\psi I]_{-\infty, x}]$ et en faisant ensuite tendre x vers $+\infty$.

Pour le lemme 3 : on se ramène aussitôt au cas où $H=\Omega$. Puis on écrit $2\ell = \int u = \int_0^\infty P\{u>t\}dt \leq \int_0^\ell dt + \int_0^{r\ell} P\{u>\ell\} + \int_{r\ell}^\infty P\{u>t\}dt$ ($r \geq 1$). Dans le dernier terme on majore $P\{u>t\}$ par m^2/t^2 et il vient

$$2\ell \leq \ell + r\ell P\{u>\ell\} + m^2/r\ell$$

On a $m^2 \geq 4\ell^2$ (Jensen). On prend $r=2m^2/\ell^2$ et on a l'inégalité cherchée.