SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Un gros processus de Markov. Application à certains flots

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 109-112
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__109_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970/71

UN GROS PROCESSUS DE MARKOV
APPLICATION À CERTAINS FLOTS

par J. de Sam Lazaro et P.A. Meyer

Dans notre article [2], nous avons décrit la construction de prédicteurs pour les flots filtrés purement stochastiques, i.e., de versions particulières des opérateurs d'espérance conditionnelle par rapport au passé. Comme il est malsain de bâtir des théories générales sans jamais regarder de cas particuliers, nous nous sommes proposés de " calculer" l'un de ces prédicteurs dans le cas du flot du mouvement brownien. Le calcul ne présente d'ailleurs aucune difficulté, sinon celle de choisir des notations un peu maniables. Mais il se trouve aussi qu'il a une signification un peu plus générale, et permet d'interpréter une très jolie formule de DAWSON [1].

LE CAS MARKOVIEN

Nous considérons un espace d'états polonais E, sur lequel est donné un semi-groupe markovien (P_t) satisfaisant aux hypothèses droites (s'il est sous-markovien , on le rend markovien au préalable de la manière habituelle). Nous en construisons la réalisation continue à droite canonique, sans complétion des tribus

(1) $\qquad \Omega^+, \underline{\underline{F}}^+ , \underline{\underline{F}}_t^+ , X_t^+ , P_x^+$

(malgré la présence du signe +, la famille $(\underline{\underline{F}}_t^+)$ n'est pas non plus rendue continue à droite !) . Nous considérerons deux autres espaces :

(2) $\qquad \Omega^- , \underline{\underline{F}}^-, X_t^-$

l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans E, continues à gauche sur $]0,\infty[$, avec sa tribu naturelle et ses applications coordonnées, et

(3) $\qquad \Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t , X_t , \Theta_t \quad (t\in\mathbb{R})$

l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}$ dans E, avec sa famille de tribus naturelle et ses applications coordonnées. La translation Θ_t est définie comme d'habitude par $X_s(\Theta_u\omega)= X_{s+u}(\omega)$.

Etant donnés $\omega\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, nous pouvons " partager" ω en deux applications de $\mathbb{R}_+$ dans E, $\omega_t^+\in\Omega^+$ et $\omega_t^-\in\Omega^-$, de la manière suivante :

(4) $$X_s^+(\omega_t^+) = X_{t+s}(\omega) \quad , \quad X_s^-(\omega_t^-) = X_{t-s}(\omega)$$

Etant donnés d'autre part deux éléments ω^- et ω^+ de Ω^- et Ω^+ respectivement, nous pouvons définir un élément $\omega^-|t|\omega^+$ de Ω par

(5) $$X_s(\omega^-|t|\omega^+) = X_{s-t}^+(\omega^+) \text{ si } s\geqq t$$
$$= X_{t-s}^-(\omega^-) \text{ si } s<t$$

On a $(\omega^-|t|\omega^+)_t^+ = \omega^+$, mais $(\omega^-|t|\omega^+)_t^-$ n'est égal à ω^- que si $X_0^-(\omega^-) = X_0^+(\omega^+)$. Il faut aussi noter la formule

(6) $$\Theta_u(\omega^-|t|\omega^+) = \omega^-|t-u|\omega^+$$

Nous allons construire un processus de Markov (le " gros" processus du titre) dont l'espace de base sera Ω, l'espace d'états Ω^- . Nous prendrons comme variables aléatoires, pour $t\geqq 0$

(7) $$\xi_t(\omega) = \omega_t^-$$

Pour chaque $\omega^-\in\Omega^-$, nous définirons une mesure P_{ω^-} sur Ω , comme l'image de la mesure $\varepsilon_{\omega^-}\otimes P^+_{X_0^-(\omega^-)}$ par l'application $(w^-,w^+)\longmapsto w^-|0|w^+$ de $\Omega^-\times\Omega^+$ dans Ω. Ainsi pour la loi P_{ω^-} le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur Ω est déterministe jusqu'à l'instant 0, et à partir de 0 un processus de Markov issu de $X_0^-(\omega^-)$.

PROPOSITION. <u>Le système</u> ($\Omega,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geqq 0}$, $(\xi_t)_{t\geqq 0}$, (Θ_t), P_{ω^-}) <u>est un processus de Markov au sens de DYNKIN sur</u> Ω .

DEMONSTRATION. Il est très facile de vérifier que ξ_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, et que $\xi_t\circ\Theta_s=\xi_{t+s}$.

Ensuite, nous allons indiquer (en adaptant la méthode de DAWSON dans [1]) une recette pour le calcul des espérances conditionnelles. A toute fonction positive F $\underline{\underline{F}}^-\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^+$-mesurable sur $\Omega^-\times\mathbb{R}_+\times\Omega^+$ associons la fonction sur $\Omega^-\times\mathbb{R}_+\times E$

(8) $$\Phi(\omega^-,t,x\ ) = E_x^+[F(\omega^-,t,.)]$$

Je dis qu'alors Φ est $\underline{\underline{F}}^-\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{B}}(E)$-mesurable, et que de plus/ pour toute loi P_{w^-} l'espérance conditionnelle de la fonction $\omega\longmapsto F(\omega_t^-,t,\omega_t^+)$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$ est égale à $\omega\longmapsto\Phi(\omega_t^-,t,X_t(\omega))$. On a même un résultat plus fort : si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, l'espérance conditionnelle de $\omega\longmapsto F(\omega^-_{T(\omega)},T(\omega),\omega^+_{T(\omega)})$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_{T+}$, pour toute loi P_{w^-} , est égale à $\omega\longmapsto\Phi(\omega^-_{T(\omega)},T(\omega),X_{T(\omega)}(\omega))$. Noter que $X_T(\omega)=X_0^-(\omega_T^-)$.

Pour voir cela, il suffit, grâce au théorème des classes monotones, de se borner au cas où $F(\omega^-,t,\omega^+)$ s'écrit $a(\omega^-)b(t)c(\omega^+)$, et c'est alors la propriété de Markov (faible ou forte, suivant le cas) du processus $(X_t)_{t\geqq 0}$ pour la mesure P_{w^-} , relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_t\ )_{t\geqq 0}$.

Ceci étant, nous pouvons calculer pour toute fonction positive $\underline{\underline{F}}$-mesurable f sur Ω, l'espérance $E_{w^-}[f|\underline{\underline{F}}_t]$, ou même $E_{w^-}[f|\underline{\underline{F}}_{T+}]$. Introduisons en effet la fonction

(9) $$F(\omega^-,t,\omega^+) = f(\omega^-|t|\omega^+)$$

et la fonction Φ correspondante. La fonction $\omega \mapsto F(\omega_t^-,t,\omega_t^+)$, ou même $\omega \mapsto F(\omega_T^-,T,\omega_T^+)$, n'est autre que f, car $\omega_T^-|T|\omega_T^+ = \omega$ identiquement. Ainsi $E[f|\underline{\underline{F}}_{T+}] = \Phi(\omega_T^-,T(\omega),X_T(\omega))$.

Démontrons d'abord la propriété de Markov simple du processus (ξ_t), à la manière de DYNKIN. Il nous faut prouver que si f est comme ci-dessus

(10) $$E_{w^-}[f\circ\Theta_t|\underline{\underline{F}}_t] = E_{\xi_t}[f] \quad P_{w^-}\text{-p.s.}$$

Nous écrivons la fonction F correspondant à $f\circ\Theta_t$, soit $F(\omega^-,t,\omega^+)= f(\Theta_t(\omega^-|t|\omega^+))=f(\omega^-|0|\omega^+)$. Alors $\Phi(\omega^-,t,x)=E_x^+[f(\omega^-|0|.)]$, et l'espérance conditionnelle au premier membre vaut

$$E^+_{X_0^-(\omega_t^-)}[f(\omega_t^-|0|.)]$$

Que vaut $E_{\xi_t(\omega)}[f] = E_{\omega_t^-}[f]$? Par définition de la mesure $P_{\omega_t^-}$, mesure image de $\varepsilon_{\omega_t^-}\otimes P^+_{X_0^-(\omega_t^-)}$ par $(u^-,u^+)\mapsto u^-|0|u^+$, c'est $E^+_{X_0^-(\omega_t^-)}[f(\omega_t^-|0|.)]$, et la propriété est établie. La propriété de Markov forte s'établit de même, seules les notations se compliquent un peu.

APPLICATION AU FLOT BROWNIEN

Conservons pour un instant les définitions précédentes. Nous désignerons par (Π_t) le semi-groupe de transition du gros processus. Si μ est une loi initiale sur Ω^-, la loi correspondante sur Ω sera notée Π_μ.

Nous prenons maintenant $E=\mathbb{R}$, et pour (P_t^+) le semi-groupe du mouvement brownien. Nous notons $W^-=W^+$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles pour t=0 (c'est un sous-ensemble de Ω^- et Ω^+), et W l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulles pour t=0. Nous prendrons pour loi initiale sur Ω^- la loi du mouvement brownien issu de 0, qui est portée par W^-, et que nous noterons μ, et comme loi sur Ω la loi Π_μ, qui est portée par W. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est alors lui aussi un mouvement brownien issu de 0. Si $\omega^-\in W^-$, la loi P_{ω^-} est portée par W, et la mesure $\Pi_t(\omega^-,d.)$ par W^- pour tout t.

L'opérateur de translation ne préserva pas W, mais si l'on définit pour $\omega\in W$ $\Gamma_t(\omega)$ par

$$X_s(\Gamma_t\omega) = X_{s+t}(\omega)-X_t(\omega)$$

alors nous avons un opérateur de translation sur W. Le système

$$W,\ \underline{\underline{F}},\ \underline{\underline{F}}_t,\ \Pi_\mu,\ \Gamma_t$$

est le flot du mouvement brownien - il est en effet trivial que Γ_t préserve la mesure Π_μ. Nous voudrions montrer que le prédicteur fondamental en est le noyau $\omega \mapsto P_{\omega_0^-}$ de W dans W. Cela signifie, d'après [2], que

PROPOSITION. Si f est $\underline{\underline{F}}$-mesurable positive sur W, et si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, $T \geq 0$, on a

$$E_\mu[f \circ \Gamma_T | \underline{\underline{F}}_{T+}] = g \circ \Gamma_T$$

où g est définie sur W par $g(\omega) = E_{\omega_0^-}[f]$.

DEMONSTRATION. On se ramène, par un argument de classes monotones, au cas où $f(\omega)$ est un produit de deux fonctions positives $a(\omega_0^-)b(\omega_0^+)$, a et b étant mesurables sur $W^- = W^+$. On a alors $g(\omega) = a(\omega_0^-)E_0^+[b]$, et la formule résulte aussitôt du fait que l'application $\omega \mapsto a((\Gamma_T\omega)_0^-)$ est $\underline{\underline{F}}_{T+}$-mesurable, tandis que $\omega \mapsto b((\Gamma_T\omega)_0^+)$ est indépendante de $\underline{\underline{F}}_{T+}$, le processus $(X_{T+t} - X_T)$ étant un mouvement brownien indépendant de $\underline{\underline{F}}_{T+}$.

L'application au mouvement brownien est donc une trivialité, qui aurait bien pu se traiter sans l'arsenal qui précédait. On en aurait eu un peu plus besoin si l'on avait voulu traiter le cas général des flots de processus à accroissements indépendants (non continus). Le point à retenir de tout ceci est surtout, sans doute, le système de notations qui permet d'écrire " explicitement" les prédicteurs comme de vrais noyaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAWSON (D.A.). Equivalence of Markov processes. Trans. Amer. M.Soc. 1968, p.1-31.

[2] SAM LAZARO (J.) et MEYER (P.A.). Méthodes de martingales et théorie des flots. Z. für W-th. verw. Geb. 18, 1971, 116-140.