

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DANIEL REVUZ

Remarque sur les potentiels de mesure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 275-277

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__275_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUE SUR LES POTENTIELS DE MESURE

par

Daniel REVUZ^(*)

Soient X et $\hat{X}$ deux processus standards en dualité (1) Chap. VI). On note comme d'habitude $U^\alpha(x, y)$ ($\alpha \geq 0$) le noyau fonction associé et

$$U^\alpha \mu(x) = \int_E U^\alpha(x, y) \mu(dy)$$

le potentiel d'ordre α de la mesure μ .

Dans (2), BLUMENTHAL et GETTOOR démontrent l'équivalence de l'hypothèse (H) de Hunt :

(H) Les ensembles semi-polaires sont polaires, et du "principe du maximum borné" suivant :

(M _{α} ^{*}) si μ est à support compact K et si $U^\alpha \mu$ est borné

$$||U^\alpha \mu|| = \sup\{U^\alpha \mu(x) : x \in K\}.$$

La démonstration est faite sous l'hypothèse que les fonctions α -excessives sont SCI ce qui entraîne en particulier que X est standard spécial. Pour $\alpha = 0$ il faut évidemment faire de plus une hypothèse de transience sur le processus.

Dans (2) l'hypothèse de semi-continuité inférieure sert essentiellement dans la proposition suivante d'un intérêt intrinsèque évident.

Proposition : Si $U^\alpha \mu$ est borné, la mesure μ ne charge pas les ensembles polaires.

(*) Equipe de recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n°2 "Théories Physiques et probabilités" associée au C.N.R.S..

Nous allons montrer ici (en n'écrivant que le cas $\alpha = 0$) que cette proposition peut se démontrer sous des hypothèses différentes : X est standard spécial, le temps de mort ζ est fini p.s. (hypothèse de transience), il existe un $\alpha > 0$ tel que la fonction $U^\alpha(., E)$ soit SCI. Il suffirait en fait que cette fonction soit co-finement SCI.

Démonstration : Posons $f = U_\mu$; la surmartingale $f(X_t)$ est bornée. Pour tout $x \in E$, presque toute trajectoire est sans discontinuité de 2ème espèce et l'on pose :

$$Z(\omega) = f(X_{\zeta}(\omega))_- = \lim_{t \uparrow \zeta(\omega)} f(X_t(\omega)) .$$

Soit maintenant $\{T_n\}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers $T \geq \zeta$. Presque-sûrement $f(X_{T_n})$ tend vers Z sur $\Gamma = \{T_n < \zeta \text{ pour tout } n\}$ et vers zéro sur Γ^c . On a donc :

$$P_{T_n} f(x) = E_x(f(X_{T_n}) \cdot 1_{\{T_n < \zeta\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_x(Z \cdot 1_{\Gamma})$$

puisque f est bornée et si l'on appelle ζ_A la partie accessible de ζ ({3} p.102) :

$$\lim_n P_{T_n} f(x) \leq E_x(Z \cdot 1_{\{\zeta = \zeta_A\}}) .$$

Posons maintenant $D_n = \{x : \alpha U^\alpha(x, E) \leq 1/n\}$ pour la valeur de α visée dans l'hypothèse ; d'après MEYER ({3}) la suite T_{D_n} tend en croissant vers ζ et l'on a $T_{D_n} < \zeta$ pour tout n sur l'ensemble $\{\zeta = \zeta_A\}$. On a donc :

$$\lim_n P_{D_n} f(x) = E_x(Z \cdot 1_{\{\zeta = \zeta_A\}}) .$$

Mais par ailleurs les ensembles D_n sont fermés, donc $\hat{X}_{T_{D_n}} \in D_n$ presque-sûrement, donc $\alpha U^\alpha(\hat{X}_{T_{D_n}}, E) \leq 1/n$ et donc si $T = \lim_n \hat{T}_{D_n}$ $\alpha U^\alpha(\hat{X}_T, E) = 0$ sur $\{T < \zeta\}$, ce qui est impossible. Les temps $\hat{T}_{D_n}$ croissent donc vers $\hat{\zeta}$ presque-sûrement.

On peut maintenant répéter le raisonnement de {1} p.269-270. Soit h une fonction intégrable ; on a :

$$\begin{aligned} \infty > \langle h, P_{D_n} U_\mu \rangle &= \langle h, U \hat{P}_{D_n} \mu \rangle \\ &= \hat{E}_\mu \int_{T_{D_n}}^{\zeta} h(X_t) dt \end{aligned}$$

D'où il résulte que $P_{D_n} U_\mu$ tend vers zéro presque-partout, puis partout puisque U_μ est borné. Il en résulte que :

$$E_x(Z.1_{\{\zeta=\zeta_A\}}) = 0$$

pour tout $x \in E$ et donc que U^μ est un potentiel naturel. Il résulte alors de (4) V.6 que μ ne charge pas les ensembles polaires.

Remarque : Cette démonstration est beaucoup moins élémentaire que celle de Blumenthal et Gettoor. Il serait souhaitable de trouver une démonstration élémentaire et valable sous la seule hypothèse que X soit standard spécial et transient.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) BLUMENTHAL R.M. et GETTOOR R.K. : Markov processes and Potential Theory. Academic Press 1968.
- (2) BLUMENTHAL R.M. et GETTOOR R.K. : Dual processes and Potential Theory. A paraître.
- (3) MEYER P.A. : Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics 1967.
- (4) REVUZ D. : Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov. I. T.A.M.S. Vol. 148 (1970) p.501-531.

D. REVUZ
20, rue de Rome

78-LES ESSARTS LE ROI