

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Deux petits résultats de théorie du potentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 211-212

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__211_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX PETITS RESULTATS DE THEORIE DU POTENTIEL

par P.A. Meyer

Soit P un noyau sousmarkovien sur un espace d'états $(E, \underline{E})$, et soit G son noyau potentiel. Il est bien connu que toute fonction (mesurable) u est majorée par une plus petite fonction excessive Ru , la réduite de u , et que l'on a $PRu = Ru$ sur $\{u < Ru\}$. Lorsque u est positive, ou plus généralement lorsqu'il existe un potentiel fini p tel que $u \geq p$, Ru est limite de la suite (u_n) définie de manière récurrente par

$$u_0 = u, \quad u_n = u_{n-1} \vee Pu_{n-1}$$

Les résultats qui suivent sont des sous-produits de la rédaction d'un chapitre sur la question. Le premier reprend un théorème du livre "probabilités et potentiel"⁽¹⁾, en l'améliorant un peu de manière à répondre à une question de DELLACHERIE, et en le démontrant sans résolvantes. Le second développe un théorème de MOKOBODZKI⁽²⁾

THEOREME. Supposons que le noyau G soit propre. Soit v une fonction ≥ 0 possédant la propriété suivante : pour toute fonction positive f telle que Gf soit partout fini, et que l'on ait $v \geq Gf$ sur $\{f > 0\}$, on a $v \geq Gf$ partout. Alors v est excessive.

DEMONSTRATION. Appelons fonctions dominantes les fonctions v possédant cette propriété. Toute fonction excessive est dominante (principe de domination), et l'inf de deux fonctions dominantes est dominante.

Commençons par le cas où v est majorée par un potentiel fini u . On a alors aussi $u \geq Rv$, et donc $Rv = Gf$, où $f = Rv - PRv$. Mais $Rv = PRv$ sur $\{v < Rv\}$; donc v majore Gf sur $\{f > 0\}$, donc partout, donc $v = Rv$ et v est excessive.

On passe au cas général en considérant une suite de potentiels finis $p_n \uparrow +\infty$, et en appliquant ce qui précède aux fonctions $v \wedge p_n$. $\square$

MOKOBODZKI a démontré le théorème suivant, dont il a fait l'un des principaux résultats de la théorie : soient u et v deux fonctions excessives finies, alors $R(u-v) \ll u$, où $\ll$ désigne l'ordre fort. Ce théorème se laisse renforcer de la manière suivante :

THEOREME. Soient a une fonction telle que $R(-a)$ soit partout finie, b une fonction telle que $a \ll b$. On a alors $Ra \ll Rb$.

DEMONSTRATION. Rappelons que $a \ll b$ signifie qu'il existe c excessive telle que $a+c=b$; cela a un sens ici, car a ne prend pas la valeur $-\infty$.

Reprenons le calcul de MOKOBODZKI : soit f une fonction telle que $G|f|$ soit finie, et soit $w=Gf$. Comme on a $Rw \leq Gf^+$, Rw est le potentiel d'une fonction positive h que l'on évalue ainsi. Soit K l'opérateur non linéaire $g \mapsto g \vee Pg$; on a $Rw = \lim_n K^n w$ (calcul de la réduite appelé au début de l'exposé). Kw est une différence de potentiels finis, donc $Kw = G(I-P)Kw$, et

$$\begin{aligned} (I-P)Kw &= (I-P)KGf = (I-P)[Gf \vee PGf] = (I-P)[Gf \vee (Gf-f)] = \\ &= (I-P)[Gf+f^-] = f + (I-P)f^- = f^+ - Pf^- . \end{aligned}$$

Ainsi, si T est l'opérateur non linéaire $g \mapsto g^+ - Pg^-$, on a $KGf = GTf$. Comme $G|Tf|$ est fini, on peut itérer, et il vient $K^n w = K^n Gf = GT^n f$, d'où $(I-P)K^n w = T^n f$, et enfin $h = \lim_n T^n f$.

Démontrons le théorème en commençant par le cas où $a=Gf, b=Gg$, les fonctions $|f|$ et $|g|$ ayant des potentiels finis. La relation $a \ll b$ équivaut alors à $f \leq g$, donc $f^+ \leq g^+$, $f^- \geq g^-$, $Pf^- \geq Pg^-$, et finalement $Tf \leq Tg$, d'où $Ka \ll Kb$, puis $K^n a \ll K^n b$ et enfin $Ra \ll Rb$.

Passons ensuite au cas où $R(-a)$ et $R(b)$ sont finies. Notons u la fonction excessive $R(-a)+Rb+(b-a)$; u majore b et $-a$, donc aussi a et $-b$, et enfin $|a|$ et $|b|$. Introduisons pour $0 < c < 1$ le noyau $P_c = cP$, le noyau potentiel G_c et la relation forte $\ll_c$, la réduite R_c qui lui correspondent. La série $\sum P_c^k |a - P_c a|$ est majorée par $\sum c^k P_c^k (u + cPu) \leq u \frac{1+c}{1-c}$, et on peut donc écrire $a = G_c f$ ($f = a - P_c a$, $G_c |f|$ finie), de même $b = G_c g$, et $a \ll_c b$. Le résultat précédent s'applique alors et donne $R_c a \ll_c R_c b$. On fait alors tendre c vers 1.

Enfin, passons au théorème tel qu'il est énoncé. Soit A l'ensemble $\{Rb < \infty\}$, et soit P_A le noyau induit sur l'ensemble absorbant A . On vérifie aussitôt que $(Rb)_A$, la restriction de Rb à A , est égale à $R_A(b_A)$, la P_A -réduite de la restriction b_A . On peut alors appliquer le résultat précédent aux restrictions a_A et b_A , ce qui donne $a_A \ll_{P_A} b_A$. Il existe donc une fonction f définie dans A et P_A -excessive telle que $a+f=b$ dans A ; en prolongeant f par $+\infty$ dans A^c on obtient une fonction excessive dans E telle que $a+f=b$ dans E , donc $a \ll b$. $\square$

(1) p.228 de l'édition française (Hermann, 1966).

(2) Séminaire de Strasbourg IV, p.173.