Paul-André Meyer

Un théorème sur la répartition des temps locaux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 209-210
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__209_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970-71

UN THEOREME SUR LA REPARTITION DES TEMPS LOCAUX

exposé de P.A.Meyer

Soit X un processus de HUNT à valeurs dans E (nous supposerons que E contient un point de perte ∂) , et soient a un point de E régulier pour $\{a\}$, (L_t) un temps local de X pour a. Nous utiliserons sans autre commentaire la réalisation canonique et les notations usuelles.

KESTEN a utilisé , dans un travail non publié sur la continuité des temps locaux pour les processus à accroissements indépendants, le théorème suivant :

THEOREME. <u>Soit</u> T <u>un temps terminal</u> (<u>fortement markovien</u>) <u>de</u> X , <u>fini</u> P^a-<u>p.s.</u> . <u>Alors</u>

1) <u>La variable aléatoire</u> L_T <u>admet une loi exponentielle</u>
2) <u>Les variables aléatoires</u> X_T <u>et</u> L_T <u>sont indépendantes.</u>

La démonstration de KESTEN n'est pas simple, et ce théorème ne figurera d'ailleurs plus dans la rédaction définitive de son article (en collaboration avec GETOOR). Divers strasbourgeois en ont proposé des démonstrations plus ou moins simples. Celle qui suit semble être la plus rapide de toutes : elle est due à MAISONNEUVE. On rappelle tout de même que l'invention revient à KESTEN, et que " knowing that a result is true is a tremendous hint" .

DEMONSTRATION. On introduit la fonction inverse du temps local :

$$\tau_t = \inf \{ u : L_u > t \}$$

On a $\{L_T>t\} = \{T>\tau_t\}$. D'autre part, on a $\tau_{s+t} = \tau_s + \tau_t \circ \theta_{\tau_s}$ p.s.. Donc

$$\{L_T>s+t\} = \{T>\tau_s , T-\tau_s > \tau_t \circ \theta_{\tau_s}\} = \{T>\tau_s\} \cap \theta_{\tau_s}^{-1}\{T>\tau_t\} \text{ p.s.}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé la propriété de Markov forte du temps terminal T : $T-\tau_s = T\circ\theta_{\tau_s}$ sur $\{T>\tau_s\}$. On applique alors la propriété de Markov forte au temps d'arrêt fini τ_s : comme $X_{\tau_s} = a$, il vient

$$P^a\{L_T>s+t\} = P^a\{L_T>s\}P^a\{L_T>t\}$$

d'où la répartition exponentielle. Pour l'indépendance, on procède de même :

$$\{L_T>s, X_T\in A\} = \{T>\tau_s\} \cap \theta_{\tau_s}^{-1}\{X_T\in A\}$$

et on applique la propriété de Markov forte, en remarquant que $\{T>\tau_s\}$

est un événement antérieur à τ_S .

Il faut remarquer que la première partie de la démonstration a utilisé <u>uniquement</u> le fait que T est fini et satisfait à $T-\tau_S = T\circ\theta_{\tau_S}$ sur $\{T>\tau_S\}$. Elle vaut donc aussi pour les <u>temps de retour</u> finis. En revanche, la seconde partie de la démonstration vaut pour <u>tous</u> les temps d'arrêt.

Le théorème que l'on vient d'établir est lié à la théorie des processus de Poisson ponctuels d'ITO (voir un autre exposé de ce séminaire). Supposons que l'on ait $P^a\{X_T=a\}=0$, et que T soit un temps terminal parfait . La valeur $T(\omega)$ tombe dans un intervalle $]u(\omega),v(\omega)[$ contigu à l'ensemble $\{ s : X_s(\omega)=a\}$, et il existe un nombre $S(\omega)$ unique tel que

$$u=\tau_{S-} \quad , v=\tau_S$$

On a $S=L_u=L_v=L_T$. L'excursion e_S du processus dans l'intervalle $]u,v[$:

$$X_t(e_S(\omega))= X_{u(\omega)+t}(\omega) \text{ si } t<v(\omega)-u(\omega)$$
$$= \partial \text{ sinon}$$

est la première excursion qui " réalise T" , i.e. $S=\inf \{s : T(e_s)<\infty \}$, et on a $X_T= X_T(e_S)$, $T(e_S)=T-u$ du fait que T est parfait.

La théorie des processus de Poisson ponctuels affirme alors que la variable aléatoire

$$S = \inf \{ s : e_s \text{ réalise } T \} = L_T$$

admet une loi exponentielle, et que S est indépendante de e_S, et donc aussi de $X_T(e_S)$. On a donc obtenu le théorème de KESTEN, sous les restrictions ($X_T\neq a$, T parfait) imposées plus haut.