

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 5 (1971), p. 191-195

<[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1971\\_\\_5\\_\\_191\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__191_0)>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION SIMPLIFIEE D'UN THEOREME DE KNIGHT

par P.A. Meyer

Le résultat suivant est bien connu : il est dû à Paul LEVY, et on sait maintenant le démontrer très simplement, au moyen de la formule de changement de variables dans les intégrales stochastiques ( voir la démonstration de KUNITA-WATANABE, dans [2] p.110 )

THEOREME 1.- Soient  $X^1, X^2, \dots, X^n$  des martingales continues ( définies sur un même espace  $(\Omega, \underline{F}, P)$ , relatives à une même famille de tribus  $(\underline{F}_t)$  ) telles que

$$X_0^i = 0 \text{ pour } i=1, \dots, n$$

$$\langle X^i, X^i \rangle_t = t \text{ pour } i=1, \dots, n$$

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = 0 \text{ pour } i=1, \dots, n, j=1, \dots, n, i \neq j.$$

Alors le processus  $X=(X^1, \dots, X^n)$  est un mouvement brownien à n dimensions.

Supposons maintenant que les martingales soient telles que  $X_0^i = 0$ ,  $\langle X^i, X^j \rangle = 0$ , mais ne satisfassent pas à la seconde condition. Posons  $A_t^i = \langle X^i, X^i \rangle_t$ , et désignons par  $\tau_t^i$  la fonction réciproque de  $A_t^i$ . (\*)  
Le théorème 1 entraîne aussitôt le résultat suivant :

COROLLAIRE.- Supposons que  $A^1 = A^2 = \dots = A^n$ , et que l'on ait  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t^i = +\infty$ . Notons  $\tau$  la valeur commune des processus  $\tau_t^i$ . Alors le processus  $X_t = (X_{\tau_t}^1, X_{\tau_t}^2, \dots, X_{\tau_t}^n)$  est un mouvement brownien à n dimensions.

F.KNIGHT a présenté à Oberwolfach en Mai 1970 le théorème suivant, qui étend ce corollaire de manière frappante :

THEOREME 2. Supposons seulement que  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t^i = +\infty$  pour  $i=1, \dots, n$ . Alors le processus  $X_t = (X_{\tau_t^1}^1, X_{\tau_t^2}^2, \dots, X_{\tau_t^n}^n)$  est un mouvement brownien à n dimensions.

---

(\*)  $\tau_s^i = \inf \{ u : A_u^i > s \}$  ; on a  $A_{\tau_s^i}^i = s$ , et  $\tau_{A_s^i}^i$  = premier point de croissance de  $A_t^i$  à droite de  $s$ .

L'énoncé n'est pas tout à fait celui de KNIGHT, qui est un peu plus général et s'applique même au cas où les  $A_{\infty}^i$  sont finis. Nous laisserons cela de côté, et nous démontrerons le théorème 2 sous cette forme, par une méthode différente de celle de KNIGHT.

Nous commençons par rappeler un autre résultat bien connu sur le mouvement brownien linéaire ([2], p.135).

THEOREME 3. - Soit  $(B_t)$  un mouvement brownien linéaire issu de 0, et soit  $(\underline{B}_t)$  sa famille de tribus naturelle (qui est continue à droite après adjonction des ensembles négligeables). Tout élément  $H$  de  $L^2(\underline{B}_{\infty})$  admet alors une représentation comme intégrale stochastique

$$H = E[H] + \int_0^{\infty} h_s dB_s$$

où  $(h_t)$  est un processus prévisible par rapport à la famille  $(B_t)$ , tel que  $E[\int_0^{\infty} h_s^2 ds] < \infty$ .

Ce théorème ne s'étend pas en général aux martingales continues. Mais soit  $(X_t)$  une martingale continue telle que  $X_0=0$ ; posons  $A_t = \langle X, X \rangle_t$  et supposons que  $A_{\infty} = \infty$ ; introduisons la fonction  $\tau$  réciproque de  $A$  comme plus haut, et posons  $B_t = X_{\tau_t}$ . C'est un mouvement brownien auquel s'applique le théorème 3. Alors :

LEMME.- Tout élément  $H$  de  $L^2(\underline{B}_{\infty})$  admet une représentation comme intégrale stochastique

$$H = E[H] + \int_0^{\infty} k_s dX_s$$

où  $(k_t)$  est un processus prévisible par rapport à la famille  $(\underline{F}_t)$ , et  $E[\int_0^{\infty} k_s^2 dA_s] < \infty$ .

DEMONSTRATION.- Soit  $(h_s)$  un processus prévisible par rapport à la famille  $(\underline{B}_s)$ . Posons  $k_s(\omega) = h_{A_s(\omega)}(\omega)$  : je dis que  $(k_t)$  est prévisible par rapport à la famille  $(\underline{F}_t)$ , et que l'on a

$$E[\int_0^{\infty} h_s^2 ds] = E[\int_0^{\infty} k_s^2 dA_s] \quad ; \quad \int_0^{\infty} h_s dB_s = \int_0^{\infty} k_s dX_s \quad \text{p.s.}$$

Le lemme sera alors une conséquence immédiate du théorème 3.

Il suffit de faire la vérification lorsque  $(h_s)$  est un processus prévisible élémentaire, de la forme

$$h_s = 0 \text{ si } s \leq u \text{ ou } s > v$$

$h_s = f(B_{r_1}, \dots, B_{r_n})$  si  $u < s \leq v$ , où  $f$  est borélienne bornée sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $r_1, \dots, r_n$  sont  $\leq u$ . Dans ce cas,  $k_s$  est donné par

$$k_s = 0 \text{ si } s \leq \tau_u \text{ ou } s > \tau_v$$

$$k_s = f(X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n}) \text{ si } \tau_u < s \leq \tau_v.$$

La vérification est alors facile, et laissée au lecteur.

Passons à la démonstration du théorème de KNIGHT. Nous poserons  $B_t^i = X_{\tau_t}^i$ , et nous ferons l'hypothèse de récurrence suivante, qui

vient d'être vérifiée au rang 1.

Le processus  $(B_t^1, \dots, B_t^{n-1})$  est un mouvement brownien à  $n-1$  dimensions. Notons  $\mathbb{B}_t^{(n-1)}$  la famille de tribus qu'il engendre. Alors tout élément  $H$  de l'espace  $L^2(\mathbb{B}_\infty^{(n-1)})$  admet une représentation au moyen d'intégrales stochastiques

$$H = E[H] + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\infty k_s^i dX_s^i$$

où les  $k_s^i$  sont des processus prévisibles par rapport à la famille  $(\mathbb{F}_t)$ .

Le mouvement brownien  $(B_t^n)$  est alors indépendant de  $(B_t^1, \dots, B_t^{n-1})$ . En effet, soit  $K \in L^2(\mathbb{B}_\infty^n)$  admettant la représentation

$$K = E[K] + \int_0^\infty k_s^n dX_s^n \quad (k_s^n \text{ prévisible p.r. } (\mathbb{F}_t))$$

L'orthogonalité de  $X^n$  et des  $X^i$  ( $i < n$ ) entraîne que  $E[HK] = E[H]E[K]$ . Il en résulte aussitôt que le processus  $(B_t^1, \dots, B_t^n)$  est un mouvement brownien à  $n$  dimensions.

Appliquons maintenant la formule du changement de variable dans les intégrales stochastiques, pour des martingales continues. Posons  $M_s^i = \int_0^s k_u^i dX_u^i$ . Nous avons  $M^i$  et  $M^n$  étant orthogonales

$$M_\infty^i M_\infty^n = \int_0^\infty (M_s^i dM_s^n + M_s^n dM_s^i) = \int_0^\infty M_s^i k_s^n dX_s^n + \int_0^\infty M_s^n k_s^i dX_s^i$$

Il en résulte que  $HK$  est de la forme voulue. L'ensemble des intégrales stochastiques de la forme

$$a + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty k_s^i dX_s^i, \quad \text{avec } \sum E[\int_0^\infty k_s^{i2} dA_s^i] < \infty$$

d'une part, contient un ensemble total dans  $L^2(\mathbb{B}_\infty^{(n)})$ , et d'autre part est fermé dans  $L^2(\Omega)$  [ d'après KUNITA-WATANABE : il est formé des variables aléatoires terminales des martingales de carré intégrable, appartenant au sous-espace stable<sup>(\*)</sup> engendré par  $X^1, X^2, \dots, X^n$  ]. Il contient donc  $L^2(\mathbb{B}_\infty^{(n)})$  tout entier, et nous avons vérifié l'hypothèse de récurrence au rang  $n$ . ]

(\*) Voir [2], p. 81.

## EXTENSION DU THEOREME DE KNIGHT AUX PROCESSUS DE POISSON

Le théorème suivant fait pendant au théorème 1, pour le processus de Poisson. Nous l'énonçons pour une seule martingale.

THEOREME 1'. - Soit  $(Q_t)$  une martingale de carré intégrable telle que  $Q_0=0$ , purement discontinue et à sauts tous égaux à 1, telle que  $\langle Q, Q \rangle_t = t$ . Alors  $(Q_t)$  est un processus de Poisson compensé : le processus  $(Q_t+t)$  est un processus de Poisson de paramètre 1.

Ce théorème est dû à S.WATANABE, et il est démontré sous une forme un peu différente dans [3].

THEOREME 3'. - Soit  $(Q_t)$  la famille de tribus naturelle du processus  $(Q_t)$ . Cette famille est alors continue à droite après complétion, et tout élément  $H$  de  $L^2(Q_\infty)$  admet une représentation comme intégrale stochastique

$$(*) \quad H = E[H] + \int_0^\infty h_s dQ_s$$

où  $(h_t)$  est un processus prévisible tel que  $E[\int_0^\infty h_s^2 ds] < \infty$ .

Voici très sommairement la démonstration de ces deux théorèmes. Soit  $S$  l'instant du premier saut du processus  $(Q_t)$ . Appliquons la formule du changement de variables à la fonction  $e^{iut}$  entre les instants 0 et  $S$ , il vient

$$E[e^{iu(1-S)}] = 1 + E\left[\int_0^S iue^{iuQ_r-dQ_r}\right] + E\left[\sum_{r \leq S} e^{iuQ_r} - e^{iuQ_r-} - iue^{iuQ_r-}\right]$$

Le second terme est nul, et le dernier se réduit à  $E[e^{iu(1-S)} - e^{iuS} - iue^{-iuS}]$ , donc

$$E[e^{iuS}] = \frac{1}{1+iu}$$

Donc  $S$  a une répartition exponentielle de paramètre 1. Si on voulait mettre en évidence l'indépendance de  $S$  et de  $Q_0$  (qui est ici évidente,  $Q_0$  étant triviale), on écrirait toutes ces formules avec  $E[.]|Q_0$  au lieu de  $E[.]$  : c'est ce qu'il faut faire pour montrer que les écarts entre les sauts suivants sont des variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

Pour prouver le second théorème, nous remarquons que la famille de tribus est aussi engendrée par le processus de Poisson  $P_t = Q_t + t$ . D'après KUNITA-WATANABE, il suffit de montrer que toute martingale  $(M_t)$  de carré intégrable et d'espérance nulle, orthogonale à  $(Q_t)$ , est nulle.

Toujours d'après KUNITA-WATANABE (cf. [2], p.131), il suffit de

montrer que  $(M_t)$  est orthogonale aux martingales fondamentales du processus de Poisson :

$$C_t^f = f \circ P_t - f \circ P_0 - \int_0^t A f \circ P_s \, ds$$

où  $f \in C_c^\infty$ , et où  $A$ , le générateur infinitésimal du processus de Poisson, est donné par  $Af(x) = f(x+1) - f(x)$ . Finalement tout revient à montrer que  $(C_t^f)$  est une intégrale stochastique par rapport à  $(Q_t)$ . Ce n'est pas difficile :

$$C_t^f = \int_0^t [f(P_{s-}+1) - f(P_{s-})] dQ_s$$

Ceci étant, nous pouvons énoncer le théorème analogue à celui de KNIGHT

**THEOREME 2'. - Soient  $X^1, X^2, \dots, X^n$  des martingales purement discontinues, à sauts totalement inaccessibles tous égaux à +1, deux à deux orthogonales, nulles pour  $t=0$ .**

On pose  $A_t^i = \langle X^i, X^i \rangle_t$ , et on suppose que  $A_\infty^i = \infty$  pour tout  $i$ . On désigne par  $\tau_t^i$  la fonction réciproque de  $A_t^i$ , et on pose  $Q_t^i = X_{\tau_t^i}^i$ .

Alors les processus  $(Q_t^1), \dots, (Q_t^n)$  sont des processus de Poisson compensés de paramètre 1 indépendants.

La démonstration par récurrence est identique à celle du th.2. Il faut seulement remarquer, à propos du produit  $M^i M^n$ , que les processus  $X^i, X^n$  sont sans discontinuités communes. On peut donc bien appliquer une formule d'intégration par parties, et remplacer les  $M_s^j$  par  $M_{s-}^j$ .

On peut se demander si ce résultat est vraiment plus qu'une curiosité mathématique !

#### BIBLIOGRAPHIE

[1] L'article de KNIGHT contenant le théorème 2 est à paraître, sous le titre A Reduction of Continuous Square Integrable Martingales to Brownian Motion. Le théorème 2 a été énoncé dans un autre article de KNIGHT : An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes, Ann. Math. Stat. 41, 1970.

[2] MEYER, Intégrales Stochastiques I-IV, Séminaire de Probabilités de Strasbourg I, Lecture Notes in M. Vol.39, Springer 1967.

Le lemme suivant le th.3 est inspiré d'un travail de N.KAZAMAKI, à paraître aux Annales de l'Inst.H.Poincaré.