

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur un article de Dubins

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 170-176

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__170_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__170_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN ARTICLE DE DUBINS
par P.A. Meyer

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale ; on peut supposer sans restreindre la généralité que X_0 est une constante e . Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien issu de e . On se propose de trouver une suite de temps d'arrêt $0 = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$ telle que les processus (X_n) et (B_{S_n}) aient même loi.

Si l'on n'impose aucune restriction aux S_n , la remarque suivante (communiquée par DOOB) résout trivialement le problème. Considérons la tribu $\mathbb{F}_1 = \mathcal{T}(B_t, t \leq 1)$; la loi induite sur la tribu séparable $\mathbb{F}_1$ étant sans atomes, cette tribu est suffisamment riche pour que l'on puisse construire une suite (Z_n) de variables aléatoires $\mathbb{F}_1$ -mesurables, identique en loi à la suite (X_n) . Posons alors $S_0 = 0$ et

$$S_1(\omega) = \inf \{ t > 1 : B_t(\omega) = Z_1(\omega) \}$$

$$S_2(\omega) = \inf \{ t > S_1(\omega) : B_t(\omega) = Z_2(\omega) \}, \text{ etc.}$$

Il est clair que les S_n sont des temps d'arrêt (p.s. finis en vertu du comportement à l'infini des trajectoires du mouvement brownien, qui sera rappelé plus loin), et que les processus (B_{S_n}) et (Z_n) sont égaux. Noter que la propriété de martingale du processus (X_n) n'a pas été utilisée, et que $E[S_1] = +\infty$ si l'on n'a pas p.s. $Z_1 = B_1$.

On se propose donc de trouver une construction naturelle des S_n qui satisfasse à la propriété suivante : si les X_n ont des moments du second ordre, les S_n doivent être intégrables. On doit ce problème, et sa première solution dans un cas particulier, à SKOROKHOD [1], puis une extension à STRASSEN [2] ; leurs méthodes utilisent malheureusement des variables aléatoires auxiliaires adjointes au mouvement brownien. Nous suivons ici DUBINS [3], en précisant quelques points de son exposé qui nous ont semblé obscurs à la lecture. Une démonstration récente est due à ROOT [4]. A vrai dire, le point qui nous semble le plus intéressant dans l'article de DUBINS est, plutôt que le résultat final sur les S_n ,

la remarquable approximation discrète d'une mesure μ sur $\mathbb{R}$ qui figure au § 1 ci-dessous.

§ 1 . RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Les résultats de ce paragraphe sont simples, et ne font pas intervenir le mouvement brownien : nous considérons une mesure μ sur $\mathbb{R}$, ayant un moment du premier ordre, et nous nous proposons de l'approcher par une suite remarquable de mesures à support fini. Malheureusement, le système de notations est long à exposer.

Soit H une partie finie de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide) : $H = \{a_1, \dots, a_n\}$ où $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Nous poserons $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$, $A_i =]a_i, a_{i+1}]$ ($i=0, 1, \dots, n$) ; les A_i forment une partition de $\mathbb{R}$, qui engendre une tribu finie $\underline{H}$.

Nous construisons une nouvelle subdivision $\hat{H}$ de la manière suivante : si la mesure $\mu \cdot I_{A_i}$ n'est pas nulle, nous désignons par p_i sa masse totale, et nous posons

$$\mu_i = \frac{1}{p_i} I_{A_i} \cdot \mu \quad ; \quad e_i = \text{espérance de } \mu_i$$

Si la mesure est nulle, nous posons $p_i = 0$, $\mu_i = \varepsilon_{a_i}$, $e_i = a_i$. Dans ces conditions, la nouvelle partie finie $\hat{H}$ est formée des points $a_1, \dots, a_n$ et $e_0, e_1, \dots, e_n$. Nous rangeons alors ces points par ordre croissant, et nous définissons les points $\hat{a}_i$, la partition $\hat{A}_i$, la tribu $\hat{\underline{H}}$.

Nous désignons par X l'application identique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par Y la variable aléatoire $E[X|\underline{H}]$ (espérance conditionnelle pour la loi μ : Y vaut e_i sur A_i), par $\hat{Y}$ la variable aléatoire $E[X|\hat{\underline{H}}]$. Voici alors un résultat auxiliaire (proche d'un lemme utilisé, indépendamment de nous, par Gordon SIMONS [5])

LEMME 1.- $E[|X-Y|] = E[|\hat{Y}-Y|]$.

DEMONSTRATION.- Il suffit de prouver que pour $i=0, 1, \dots, n$

$$\int_{]a_i, e_i]} |X-Y| \, d\mu = \int_{]a_i, e_i]} |\hat{Y}-Y| \, d\mu \quad ; \quad \int_{]e_i, a_{i+1}]} |X-Y| \, d\mu = \int_{]e_i, a_{i+1}]} |\hat{Y}-Y| \, d\mu$$

Regardons par exemple le premier intervalle : Y y vaut e_1 , donc $|X-Y|$ y vaut $e_1 - X$. Nous pouvons nous borner à étudier le cas où l'intervalle n'est pas μ -négligeable. Posons alors

$$q = \mu([a_i, e_i]) \neq 0$$

$$f = \frac{1}{q} \int_{]a_i, e_i]} X \, d\mu \leq e_i$$

Alors $\hat{Y}$ vaut f sur $[a_i, e_i]$, et $|\hat{Y}-Y|$ y vaut e_i-f . L'égalité à démontrer se réduit donc à

$$\int_{[a_i, e_i]} (e_i - X) d\mu = \int_{[a_i, e_i]} (e_i - f) d\mu$$

ou à $\int_{[a_i, e_i]} X d\mu = f \cdot \mu([a_i, e_i])$, qui est vraie. Le lemme est établi.

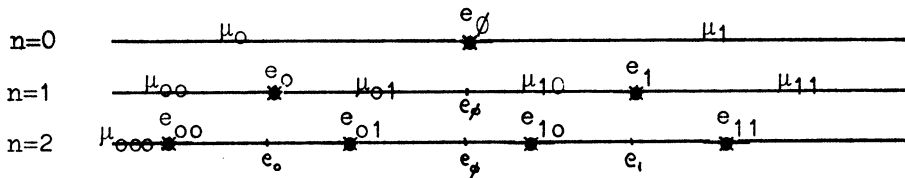
Nous allons maintenant considérer une suite particulière de subdivisions. Désignons par D l'ensemble des mots dyadiques, et définissons pour tout mot $m \in D$, une mesure μ_m , un point e_m , un coefficient p_m de la manière suivante, par récurrence sur la longueur $|m|$ de m .

$$\begin{aligned} \mu_\emptyset &= \mu, \quad p_\emptyset = 1, \quad e_\emptyset = \text{espérance de } \mu \\ \left| \begin{aligned} p_0 &= \mu([-\infty, e_\emptyset]) & p_1 &= \mu([e_\emptyset, +\infty[) \\ \mu_0 &= \frac{1}{p_0} I_{[-\infty, e_\emptyset]} \cdot \mu & \mu_1 &= \frac{1}{p_1} I_{[e_\emptyset, +\infty[} \cdot \mu \quad (\text{ou } \varepsilon_{e_\emptyset} \text{ si } p_1=0) \\ e_0 &= \text{espérance de } \mu_0, \quad e_1 = \text{espérance de } \mu_1. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ensuite, si les définitions ont été données pour les mots de longueur n , et si $|m|=n$, nous passons à la longueur $n+1$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} p_{m0} &= \mu_m([-\infty, e_m]) & p_{m1} &= \mu_m([e_m, +\infty[) \quad (e_m \text{ espérance de } \mu_m) \\ \mu_{m0} &= (\mu_m)_0 = \frac{1}{p_{m0}} I_{[-\infty, e_m]} \cdot \mu & \text{de même} & \mu_{m1} = (\mu_m)_1 \\ e_{mi} &= \text{espérance de } \mu_{mi} \quad (i=1,0) \end{aligned}$$

Nous désignerons par K_n l'ensemble des e_m pour $|m|=n$, et par H_n l'ensemble des e_m pour $|m| \leq n$. Voici des dessins qui indiquent ce qui se passe pour les petites valeurs de n . Les $\star$ désignent les éléments de K_n .



REMARQUES.- 1) La donnée des ensembles K_n détermine uniquement les points e_m et les coefficients p_m . Nous savons que $e_\emptyset$ est l'unique élément de K_0 , et que $p_\emptyset=1$; supposons déterminés les e_m et p_m pour tous les mots de longueur n . Alors

si $e_m \in K_{n+1}$, on a $e_{m0}=e_{m1}=e_m$, $p_{m0}=1$, $p_{m1}=0$

si $e_m \notin K_{n+1}$, e_{m0} est le point de K_{n+1} situé immédiatement à gauche de e_m , e_{m1} celui qui est situé immédiatement à droite, et p_{m0} et p_{m1} sont déterminés par les relations $p_{m0}+p_{m1}=1$, $p_{m0}e_{m0}+p_{m1}e_{m1}=e_m$.

2) Reprenons les notations du début : il est clair que $H_{n+1} = \hat{H}_n$. Posons $Y_n = E[X | H_n]$; nous avons $Y_{n+1} = \hat{Y}_n$. Les variables aléatoires Y_n forment (pour la loi μ) une martingale uniformément intégrable. La loi de Y_0 est portée par $K_1 = \{e_0, e_1\}$; elle vaut $p_0 \varepsilon_{e_0} + p_1 \varepsilon_{e_1}$. Nous la noterons λ_1 . Plus généralement, nous noterons λ_{n+1} la loi de Y_n ; on vérifie aisément qu'elle est portée par K_{n+1} et qu'elle vaut

$$\lambda_{n+1} = \sum_{|m|=n+1} q_m \varepsilon_{e_m}$$

où il est facile de calculer q_m : si le mot m s'écrit $m_1 m_2 \dots m_{n+1}$, on a

$$q_m = p_{m_1} p_{m_1 m_2} \dots p_{m_1 m_2 \dots m_{n+1}}.$$

3) Un point $x \in K_n$ peut admettre plusieurs représentations $x = e_m$ ($|m|=n$), mais il existe un seul m pour lequel $x = e_m$, $q_m \neq 0$. Noter aussi que les points de K_{n+1} les plus proches de e_m ($|m|=n$) sont e_{m0} et e_{m1} (éventuellement confondus tous deux avec e_m), et que si $e_m < e_{m'}$ (m et m' de longueur n) on a $e_{m1} < e_{m'0}$.

Le lemme suivant conclut le paragraphe :

LEMME 2.- Les mesures λ_n convergent étroitement vers μ .

DÉMONSTRATION.- Les Y_n forment une martingale uniformément intégrable, qui converge donc μ -p.s. et dans $L^1(\mu)$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|Y_{n+1} - Y_n|] = 0$. D'après le lemme 1 cela entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X - Y_n|] = 0$, donc $Y_n \rightarrow X$ p.s..

La convergence p.s. entraînant la convergence en loi, le lemme est prouvé.

§ 2 . UTILISATION DU MOUVEMENT BROWNIEN

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur le mouvement brownien.

Désignons par Ω l'ensemble de toutes les applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = +\infty$$

Nous posons $\omega(t) = B_t(\omega)$, $\underline{F}_t = \mathbb{T}(B_s, s \leq t)$, $\underline{F} = \underline{F}_\infty$. Si ν est une loi sur $\mathbb{R}$, P_ν est l'unique loi sur $(\Omega, \underline{F})$ pour laquelle le processus (B_t) est un mouvement brownien de loi initiale ν .

Nous désignerons en particulier par P la loi du mouvement brownien issu de 0. Nous utiliserons les résultats suivants :

a) Le processus $(X_t^2 - t)$ est une martingale (pour la loi P). Si T est un temps d'arrêt p.s. fini, on a $E[B_T^2] \leq E[T]$, avec égalité si le second membre est fini.

b) Si $a \neq 0$, le temps d'entrée dans $\{a\}$ est p.s. fini (d'après le comportement des trajectoires lorsque $t \rightarrow \infty$), mais son espérance est infinie.

c) Si $a < 0 < b$, le temps d'entrée T dans l'ensemble $\{a, b\}$ est (pour loi P) une variable aléatoire pourvue de moments de tous les ordres, on a $P\{B_T = a\} = p$, $P\{B_T = b\} = q$, où p et q sont déterminés par

$$p + q = 1, \quad pa + qb = 0.$$

Ceci étant, donnons nous d'abord une loi μ d'espérance e . Nous noterons P_e la loi P_{ε_e} . Nous définissons des temps d'arrêt R_n^μ (nous omettrons provisoirement la mention de μ) de la manière suivante :

$$R_0 = \inf \{ t : B_t \in K_0 \}$$

$$R_1 = \inf \{ t \geq R_0 : B_t \in K_1 \} \dots R_{n+1} = \inf \{ t \geq R_n : B_t \in K_n \}$$

où $K_0, K_1, \dots$ sont les ensembles associés à μ au paragraphe 1. Noter que ces temps d'arrêt sont finis, croissent avec n , et que $R_0 = 0$ P_e -p.s..

Nous désignerons par S_1^μ (ou simplement S_1 pour l'instant) la liste des R_n . Montrons (d'après une communication de I. MEILIJSON*) que S_1 est fini sur Ω . Soit $N(\omega)$ le premier instant où la trajectoire ω

(*) La démonstration de la rédaction précédente donnait seulement un résultat p.s., et la possibilité du résultat plus fort était mise en doute.

revient en e , après avoir rencontré e une première fois, puis K_1 (en e_1 par exemple). Avant l'instant $N(\omega)$, la trajectoire a rencontré dans cet ordre $e=e_0, e_1, e_{10}, e_{100}, e_{1000}$, donc aussi $K_0, K_1, K_2 \dots$ dans cet ordre ; on a donc $S_1 \leq N$, et $S_1 < \infty$.

LEMME 3.- Si Ω est muni de la mesure P_e , la loi de B_{R_n} est égale à λ_n .

DÉMONSTRATION.- Nous désignons par λ'_n cette loi. Nous raisonnons par récurrence, en supposant que pour tout mot m de longueur n tel que $q_m \neq 0$ on a $P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m$. Nous allons prouver que la même propriété a lieu pour les mots de longueur $n+1$.

Soit m' un mot de longueur $n+1$ tel que $q_{m'} \neq 0$. On a alors $m' = m_i$, avec $q_m \neq 0$, donc $P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m$. Si e_m appartient à K_{n+1} , nous avons $P\{B_{R_{n+1}} = e_{m0}\} = P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m = q_m p_{m0} = q_{m0}$, tandis que $e_{m1} = e_m$, $q_{m1} = q_m p_{m1} = 0$, de sorte que $i=0$ et que la propriété est vraie. Si e_m n'appartient pas à K_{n+1} , e_{m0} et e_{m1} sont les deux points de K_{n+1} situés immédiatement de part et d'autre de e_m et on a, d'après la propriété c) du mouvement brownien rappelée plus haut

$$P\{B_{R_{n+1}} = e_{mi} | B_{R_n} = e_m\} = p_{mi}$$

Donc $\lambda'_{n+1}(e_{mi}) \geq q_m p_{mi} = q_{mi} = q_{m'}$. Comme la somme des $q_{m'}$, tels que $q_{m'} \neq 0$ vaut 1, et que les $e_{m'}$ correspondants sont tous distincts, λ'_{n+1} ne peut charger d'autres points, et nous en déduisons que $\lambda'_{n+1} = \lambda_{n+1}$.

Utilisant maintenant la continuité des trajectoires, nous déduisons du lemme 2 que :

COROLLAIRE.- Si Ω est muni de P_e , la loi de $B_{S_1}^\mu$ est μ .

Enfin, nous avons le résultat :

LEMME 4.- $E[S_1^\mu] = \text{Var}(\mu)$.

DÉMONSTRATION.- Nous nous ramenons au cas où $e=0$, et nous appliquons les propriétés a) et c) du mouvement brownien rappelées plus haut : comme les R_n sont intégrables, on a $E[R_n] = \int x^2 \lambda_n(dx) \leq \int x^2 \mu(dx)$ (x^2 étant une fonction convexe), donc à la limite $E[S_1^\mu] \leq \text{Var}(\mu)$. Si le second membre est fini, le premier l'est aussi et on a l'égalité d'après a) ; si le premier membre est fini, de même. On a donc l'égalité dans tous les cas.

Il nous reste l'extension aux martingales. Nous nous bornerons à traiter le cas d'une martingale réduite à deux variables aléatoires X_0, X_1 , en laissant le cas général au lecteur. Nous noterons λ la loi de X_0 , et nous munirons Ω de P_λ . D'autre part, nous choisirons une répartition conditionnelle $x \mapsto \mu_x$ de X_1 relativement à X_0 , telle que pour tout x , μ_x ait une espérance finie égale à x . Nous poserons alors sur Ω

$$S_1(\omega) = S_1^\mu x(\omega) \text{ si } X_0(\omega) = x$$

Il est facile de vérifier que S_1 est un temps d'arrêt, et que le couple (B_0, B_{S_1}) a même loi que (X_0, X_1) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.V. SKOROKHOD.- Studies in theory of random processes (traduction américaine). Addison-Wesley 1965 (p.163).
- [2] V.STRASSEN .- Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. Proceedings of the 5th Berkeley Symposium, Vol.II, part 1 (p.334).
- [3] L.E.DUBINS. - On a theorem of Skorohod. Ann. M. Stat., 1968, 2094-2097.
- [4] D.H. ROOT. - The existence of certain stopping times on brownian motion. Ann. M. Stat., 1969, 715-718.
- [5] G.SIMONS.- A martingale decomposition theorem. Ann.M.Stat., 41, 1970, 1102-1104.