

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE

Intégrales stochastiques par rapport à une famille de probabilités

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 141-146

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__141_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES STOCHASTIQUES

PAR RAPPORT À UNE FAMILLE DE PROBABILITÉS

par C. DOLÉANS-DADE

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considérons une martingale continue à droite $X = (X_t)_{t \geq 0}$, et un processus $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$; si Y et X satisfont à quelques conditions simples, on sait définir l'intégrale stochastique $Z = Y \cdot X$ ($Z_t = \int_0^t Y_s dX_s$), au moyen d'une méthode de prolongement dans L^2 . Cette méthode fait intervenir explicitement la loi de probabilité P , contrairement à ce qui se produit lorsque X est un processus à variation bornée.

On sait maintenant définir (voir [2]) des intégrales stochastiques par rapport à des processus beaucoup plus généraux que les martingales : il suffit par exemple que X soit une semi-martingale locale, et que Y soit un processus localement borné. On utilise pour cela des décompositions du processus X en somme de plusieurs processus, dont les uns sont des martingales de carré intégrable, les autres des processus à variation bornée. Ces décompositions dépendent essentiellement de la loi P .

Il est naturel de se poser le problème suivant, qui se présente par exemple en théorie des processus de Markov. Considérons sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ deux processus Y et X , et toute une famille de lois de probabilités $(P^\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$. Supposons que pour chacune de ces lois P^μ , Y soit un processus prévisible localement borné, et X une semi-martingale locale. Est-il alors possible de trouver un même processus Z qui, pour chaque μ , soit une version de l'intégrale stochastique $Y \cdot X$?

Nous répondons ci-dessous à cette question par l'affirmative. La démonstration repose de manière essentielle sur l'emploi des "filtres rapides" de Mokobodzki ([3]). Cela sera rappelé plus bas, mais nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des intégrales stochastiques telle qu'elle est exposée dans [2].

1. QUELQUES LEMMES SUR LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Nous nous plaçons ici sur un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, croissante et continue à droite. Nous nous donnons aussi une loi P , et nous notons $\bar{\mathcal{F}}$ la tribu obtenue en complétant $\mathcal{F}$ pour P , et $\bar{\mathcal{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\mathcal{F}_t$ tous les ensembles P -négligeables.

Nous noterons par $\mathcal{H}$ l'espace des processus élémentaires : un processus Y est élémentaire s'il est borné, adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et s'il existe une subdivision finie de la droite $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$, telle que sur chaque intervalle $]0, t_1],]t_1, t_2], \dots,]t_n, +\infty]$, $Y_\bullet(\omega)$ ne dépend que de ω et non du temps.

Nous désignerons par $\bar{\mathcal{H}}$ l'espace des processus P -indistinguables de processus élémentaires.

Nous dirons qu'un processus est P -prévisible s'il est indistinguishable d'un processus de la tribu engendrée par les processus adaptés par rapport à la famille $\bar{\mathcal{F}}_t$, et à trajectoires continues à gauche.

LEMME 1. - La tribu des processus P -prévisibles est engendrée par les éléments de $\bar{\mathcal{H}}$.

DÉMONSTRATION. - La démonstration de ce lemme est triviale.

Nous donnons maintenant une semi-martingale locale X adaptée à la famille $(\bar{\mathcal{F}}_t)$.

LEMME 2. - Soit $(Y_t^n)_{t \geq 0}$ une suite de processus P-prévisibles, uniformément bornée, qui converge (sur $R_+ \times \Omega$) vers un processus (Y_t) . Posons
 $Z_t^n = \int_0^t Y_s^n dX_s$, $Z_t = \int_0^t Y_s dX_s$; alors pour tout t fini, on a
 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^n = Z_t$ en probabilité.

DÉMONSTRATION. - D'après [2], § 3, lemme 3 et proposition 4, il existe une suite (T_p) de temps d'arrêt tels que

$$a) \lim_p T_p = +\infty \text{ p.s.}$$

b) pour chaque p, il existe deux processus H et B (dépendants de p), à trajectoires continues à droite, arrêtées à l'instant T_p , tels que H soit une martingale de carré intégrable, B soit un processus à variation bornée sur tout intervalle fini, et que

$$X_{t \wedge T_p} = H_t + B_t .$$

Les intégrales $\int_0^{t \wedge T_p} Y_{n,s} dH_s$ convergent alors dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers $\int_0^{t \wedge T_p} Y_s dH_s$, et les intégrales $\int_0^{t \wedge T_p} Y_{n,s} dB_s$ convergent P-p.s. vers $\int_0^{t \wedge T_p} Y_s dB_s$. Les variables aléatoires $Z_{t \wedge T_p}^n$ convergent donc en probabilité vers $Z_{t \wedge T_p}$, et on obtient le résultat cherché en faisant tendre p vers $+\infty$.

LEMME 3. - Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus P-prévisible, localement borné, et soit
 (Y_t^n) le processus P-prévisible borné obtenu en tronquant Y à $n \in \mathbb{N}$;
 Z_t^n et Z_t ayant la même définition que dans l'énoncé précédent, on a encore
 $Z_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^n$ en probabilité.

DÉMONSTRATION. - Le processus Y étant localement borné, il existe des temps d'arrêt T_n tel que

$$a) \lim_n T_n = +\infty \text{ p.s.}$$

$$b) Y_s(\omega) \text{ est borné par } n \text{ si } s \in]0, T_n] .$$

Les variables aléatoires $Z_{t \wedge T_n}^p$ et $Z_{t \wedge T_n}$ sont donc égales p.s. pour $p \geq n$, et par suite $Z_t = \lim_n Z_t^n$ en probabilité.

2. APPLICATION DU THÉORÈME DE MOKOBODZKI

Mokobodzki a démontré en s'appuyant sur l'hypothèse du continu, l'existence d'un ultra-filtre $\underline{r}$ sur $\mathbb{N}$ possédant la propriété suivante :

si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, et si des variables aléatoires f_n réelles sur Ω convergent en probabilité vers f , alors les f_n convergent p.s. vers f suivant $\underline{r}$.

Nous allons appliquer ce théorème à la situation suivante : $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une famille croissante et continue à droite de tribus ; $(P^\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$ est une famille de lois de probabilité sur Ω ; pour tout μ , nous pouvons définir $\bar{\mathcal{F}}_t^\mu, \bar{H}^\mu$ pour la loi P^μ , que nous noterons $\mathcal{F}_t^\mu, H^\mu$, et nous noterons $\hat{\mathcal{F}}_t$ l'intersection des $\mathcal{F}_t^\mu$.

THÉORÈME. - Soit X un processus continu à droite, adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, qui est pour tout μ une semi-martingale locale pour la loi P^μ . Soit Y un processus adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, qui est pour tout μ P^μ -indistinguable d'un processus P^μ -prévisible pour la famille $(\mathcal{F}_t^\mu)$. Il existe alors un processus continu à droite Z , adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, qui est pour tout μ une version de l'intégrale stochastique $(\int_0^t Y_s dX_s)$ pour la loi P^μ .

DÉMONSTRATION. - Nous commencerons par le cas d'un processus Y borné. Nous dirons qu'un processus Y borné possède la propriété (I) s'il existe Z comme ci-dessus.

1) Si des processus Y^n uniformément bornés convergent partout sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ vers Y et si les Y^n possèdent la propriété (I), il en est de même de Y : en effet soient (Z_t^n) l'intégrale stochastique correspondant à

Y^n et (Z_t^μ) celle qui correspond à Y pour la loi P^μ . D'après le lemme 2, Z_t^n converge en probabilité (pour la loi P^μ) vers Z_t^μ , donc si nous posons

$$Z_t' = \lim_{\substack{n \\ \uparrow}} Z_t^n$$

Z_t' est $\mathcal{F}_t^\mu$ -mesurable pour tout μ , et est égale P^μ -p.s. à Z_t^μ . Le processus (Z_t) défini par

$$Z_t = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \text{ rationnel}}} \inf Z_s'$$

est un processus à trajectoires continues à droite, P^μ -indistinguable du processus (Z_t^μ) . C'est le processus cherché.

2) Tout processus élémentaire possède la propriété (I), donc aussi par approximation tout processus borné continu à gauche et adapté pour la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Soit Y un processus borné indistinguable pour tout μ d'un processus Y^μ continu à gauche et adapté pour la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. L'ensemble des ω tels que $Y_0(\omega)$ ne soit pas continu à gauche est P^μ -mesurable, et négligeable pour toute loi P^μ . Le processus Y possède donc aussi la propriété (I). Tout processus borné Y qui est pour tout μ , P^μ -indistinguable d'un processus P^μ -prévisible possède donc la propriété (I).

3) On passe maintenant au cas localement borné par le lemme 3, et le même procédé que ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. CHOQUET Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Soc. Math. Série 2, t.92 (1968), p. 143-153.
- [2] C. DOLÉANS-DADE & P.A. MEYER. - Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 124, Springer Heidelberg (1970) .
- [3] G. MOKOBODZKI Ultrafiltres rapides sur $\mathbb{N}$. Construction d'une densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire Brclot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel). 12e année (1967-68).