CLAUDE DELLACHERIE

Un exemple de la théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 60-70
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__60_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES Année 1968/69

UN EXEMPLE DE LA THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

par C. DELLACHERIE

La terminologie adoptée est celle de [1]. Nous étudions ici un exemple d'espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni d'une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles (i.e. $(\underline{\underline{F}}_t)$ est continue à droite et $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles P-négligeables), qui se prête aux calculs explicites. Nous pourrons ainsi caractériser les temps d'arrêt parmi les variables aléatoires et établir la classification des temps d'arrêt en temps d'arrêt totalement inaccessibles, accessibles et prévisibles. Nous pourrons aussi calculer explicitement le processus croissant naturel qui engendre certains potentiels de la classe (D). Outre un intérêt "pédagogique" certain, cet exemple permet aussi de construire quelques contre-exemples. Il faut cependant avouer qu'il est "trop pauvre" en un certain sens (les martingales continues sont triviales et tous les potentiels sont de la classe (D)) pour fournir des contre-exemples "fins".

DESCRIPTION DE LA SITUATION INITIALE-CLASSIFICATION DES TEMPS D'ARRET

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+$ et désignons par $\underline{\underline{F}}^\circ$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$. La loi P sera une loi de probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$. Nous désignerons par S l'application identité de Ω dans $\mathbb{R}_+$ et $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ désigne alors la tribu engendrée par $S\wedge t$. La tribu $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ est encore la tribu engendrée par la tribu borélienne de $[0,t]$ et par l'atome $]t,+\infty[$. On vérifie alors aisément que la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ est croissante et continue à droite. Si $\underline{\underline{F}}_t$ désigne la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ et les ensembles P-négligeables, la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie les conditions habituelles. Enfin on écrira $\underline{\underline{F}}$ au lieu de $\underline{\underline{F}}_\infty$; $\underline{\underline{F}}$ est encore la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^\circ$.

Le théorème suivant détermine complètement la structure des temps d'arrêt (plus brièvement t.d'a.) de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$:

THEOREME 1.- Une v.a. T est un t.d'a. de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ si et seulement si elle vérifie la condition suivante : il existe $s\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ tel que

a) $T \geq S$ p.s. sur l'ensemble $\{S \leq s\}$

b) $T = s$ p.s. sur l'ensemble $\{S > s\}$

DEMONSTRATION.- Comme S est un t.d'a. et que $\underline{\underline{F}}_S = \underline{\underline{F}}$, il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement soit T un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\{T \leq t\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_t$. A un ensemble négligeable près, cet ensemble appartient donc à $\underline{\underline{B}}([0,t])$ ou bien est de la forme $A \cup]t,+\infty[$, où $A \in \underline{\underline{B}}([0,t])$. Posons alors

$$s = \inf \{t : \{T \leq t\} \supset]t,+\infty[\}$$

(l'inclusion étant entendue à un ensemble négligeable près). Si $t \leq s$, $\{T \leq t\} \subset [0,t]$ et donc $T \geq S$ p.s. sur $\{S \leq s\}$; si $t \geq s$, $\{s \leq T \leq t\} \supset]t,+\infty[$ et donc, en faisant tendre t vers s, $\{T = s\} \supset]s,+\infty[$, soit $\{T = s\}$ (p.s.) sur $\{S > s\}$.

Lorsque la loi P est diffuse (i.e. $P(\{\omega\}) = 0$ pour tout ω), le théorème suivant caractérise les t.d'a. prévisibles. Sa démonstration est laissée au lecteur (faire un dessin)

THEOREME 2.- Supposons P diffuse. Alors S est un t.d'a. totalement inaccessible et un t.d'a. T est prévisible si et seulement si $P\{S = T\} = 0$.

Les temps d'arrêt accessibles sont donc prévisibles. Cela entraine que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité. (Dans [1], il est démontré que les t.d'a. accessibles sont prévisibles lorsque la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité. Nous utilisons la réciproque de cette propriété, qui ne se trouve pas dans [1]. Sa démonstration est rejetée en appendice.) En particulier, $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{F}}_{t-}$ pour tout t (par contre, si $t \neq 0$, $\underline{\underline{F}}^o_t \neq \underline{\underline{F}}^o_{t-}$ car $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ ne contient pas $\{t\}$ qui est P-négligeable)

Passons au cas extrême : P est une loi atomique. Alors S est un t.d'a. accessible, qui n'est pas prévisible dès que P charge deux points distincts différents de 0 (la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ a alors des temps de discontinuité). Il n'y a pas de t.d'a. totalement inaccessible dans ce cas.

Lorsque P a une partie diffuse et une partie atomique non nulles, S a une partie totalement inaccessible et une partie accessible qui ne sont pas p.s. infinies. Si P a un atome $a \neq 0$ et charge $]a,+\infty[$, la partie accessible de S n'est pas prévisible ($(\underline{\underline{F}}_t)$ a alors un temps de discontinuité).

REMARQUE.- Dans tous les cas, $\underline{\underline{F}}_S = \underline{\underline{F}}_{S-} = \underline{\underline{F}}$. Nous allons donner un exemple de famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ sans temps de discontinuité possédant un t.d'a. totalement inaccessible T tel que $\underline{\underline{F}}_T \neq \underline{\underline{F}}_{T-}$. Prenons pour Ω la somme ensembliste de deux copies de $\mathbb{R}_+$ désignées par $\mathbb{R}_+^1$ et $\mathbb{R}_+^2$. Soit $\underline{\underline{F}}^\circ$ la tribu somme des tribus boréliennes et désignons par U (resp V) la fonction égale à l'identité sur $\mathbb{R}_+^1$ (resp $\mathbb{R}_+^2$) et à $+\infty$ ailleurs. Soit alors $\underline{\underline{F}}_t^\circ$ la tribu engendrée par $U\wedge t$ et $V\wedge t$: c'est encore la tribu engendrée par les boréliens de $[0,t]^1$, ceux de $[0,t]^2$ et par l'atome $(]t,+\infty[)^1 \cup (]t,+\infty[)^2$. Prenons pour loi P une loi diffuse chargeant les deux copies de $\mathbb{R}_+$ et désignons par $\underline{\underline{F}}_t$ (resp $\underline{\underline{F}}$) la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t^\circ$ (resp $\underline{\underline{F}}^\circ$) et les ensembles P-négligeables. Alors la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie les conditions habituelles et une extension immédiate des résultats précédents montre que $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité. Posons $T = U\wedge V$; T est un t.d'a. totalement inaccessible et la tribu $\underline{\underline{F}}_T$ est égale à la tribu $\underline{\underline{F}}$ tandis que la tribu $\underline{\underline{F}}_{T-}$ est formée par les ensembles de la forme $A^1 \cup A^2$ où A^1 et A^2 sont deux copies d'un <u>même</u> borélien de $\mathbb{R}_+$ (à un ensemble négligeable près). Donc $\underline{\underline{F}}_T \neq \underline{\underline{F}}_{T-}$.

DETERMINATION DU PROCESSUS CROISSANT NATUREL ENGENDRANT CERTAINS POTENTIELS

Pour simplifier, nous supposerons que la loi P sur $\Omega = \mathbb{R}_+$ ne charge pas $\{0\}$ et que $P\{S>t\}>0$ pour tout t. Soit A le processus croissant défini par

$$A_t = I_{\{S \leq t\}}$$

Le processus croissant A engendre le potentiel X défini par

$$X_t = E[A_\infty - A_t | \underline{\underline{F}}_t] = I_{\{S>t\}}$$

On a alors pour tout $h>0$

$$E[X_{t+h}|\underline{\underline{F}}_t] = X_{t+h}\, I_{\{S\leq t\}} + \frac{E[I_{\{S>t\}}X_{t+h}]}{P\{S>t\}}\, I_{\{S>t\}}$$

Désignons par F la fonction de répartition de P. Comme $X_{t+h} = I_{\{S>t+h\}}$,

$$E[X_{t+h}|\underline{\underline{F}}_t] = \frac{1-F(t+h)}{1-F(t)} I_{\{S>t\}}$$

Finalement

$$E[X_t - X_{t+h}|\underline{\underline{F}}_t] = \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)} I_{\{S>t\}}$$

Posons alors pour $h > 0$

$$A_t^h = \frac{1}{h}\int_0^t E[X_s - X_{s+h}|\underline{\underline{F}}_s]\, ds = \frac{1}{h}\int_0^{S\wedge t} \frac{F(s+h)-F(s)}{1-F(s)}\, ds$$

Le processus croissant (A_t^h) est adpté et continu, donc naturel et l'on sait que pour chaque t,

$$\lim_{h\to 0} A_t^h = \hat{A}_t \quad \text{au sens de la topologie faible } \sigma(L^1,L^\infty)$$

où $(\hat{A}_t)$ est le processus croissant naturel qui engendre (X_t) (cf [2])

Par application du théorème de FUBINI, on a

$$A_t^h = \frac{1}{h}\int_0^{S\wedge t} \frac{ds}{1-F(s)} \int_s^{s+h} dF(u) = \int_0^{(S\wedge t)+h} dF(u)\left(\frac{1}{h}\int_{(u-h)^+}^{(S\wedge t)\wedge u} \frac{ds}{1-F(s)}\right)$$

Déterminons d'abord de manière heuristique la limite de A_t^h quand t tend vers 0

$$\lim_{h\to 0} A_t^h = \int_0^{S\wedge t} \frac{dF(u)}{1-F(u-)}$$

THEOREME 3.- <u>Le processus croissant naturel</u> $\hat{A}$ <u>qui engendre le potentiel</u> X <u>engendré par</u> A <u>(où</u> $A_t = I_{\{S\leq t\}}$) <u>est donné par</u>

$$\hat{A}_t = \int_0^{S\wedge t} \frac{dF(u)}{1-F(u-)}$$

DEMONSTRATION.- Désignons par B_t le second membre. Alors B_t est de la forme $f(S\wedge t)$ où f est une fonction borélienne. Comme le processus $t \to S\wedge t$ est adapté et continu, ce processus est prévisible et il en est alors de même du processus (B_t). Le processus croissant (B_t) est prévisible, donc naturel ([1]-312) Il nous reste donc à vérifier que (B_t) engendre le potentiel (X_t).

Or

$$E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_t] = \int_0^S \frac{dF(u)}{1-F(u-)} I_{\{S\leq t\}} + \frac{E[I_{\{S>t\}}\int_0^S \frac{dF(u)}{1-F(u-)}]}{P\{S>t\}} I_{\{S>t\}}$$

et

$$E[I_{\{S>t\}}\int_0^S \frac{dF(u)}{1-F(u-)}] = \int_t^\infty dF(s)\int_0^s \frac{dF(u)}{1-F(u-)} = \int_0^t \frac{dF(u)}{1-F(u-)}\int_t^\infty dF(s) + \int_t^\infty \frac{dF(u)}{1-F(u-)}\int_u^\infty dF(s)$$

la dernière égalité étant obtenue par application du théorème de FUBINI. On notera que dans le dernier signe d'intégration $\int_{u]}^{\infty}$, la borné "u" est <u>comprise</u>
Finalement

$$E[I_{\{S>t\}} \int_{0}^{S} \frac{dF(u)}{1-F(u-)}] = (1-F(t))\int_{0}^{t} \frac{dF(u)}{1-F(u-)} + (1-F(t))$$

Il est alors clair que $E[B_{\infty} - B_t | \underline{F}_t] = I_{\{S>t\}}$ et donc $B_t = \hat{A}_t$.

Lorsque P est une loi diffuse, la fonction F est continue. Dans ce cas le processus $\hat{A}$ prend la forme simple suivante :

THEOREME 4.- <u>Si</u> P <u>est une loi diffuse</u>, <u>le processus croissant naturel</u> $\hat{A}$ <u>est donné par</u>

$$\hat{A}_t = \operatorname{Log} \frac{1}{1-F(S\wedge t)}$$

On remarquera que dans ce cas $\hat{A}$ est continu; cela résulte du fait que S est un t.d'a. totalement inaccessible : le potentiel X est alors régulier.
La fonction de répartition F de la loi diffuse P peut toujours se mettre sous la forme

$$F(x) = 1 - e^{-\varphi(x)}$$

où φ est une fonction croissante, continue telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(+\infty) = +\infty$.
Alors $\hat{A}_t = \varphi(S\wedge t)$; en particulier si P est la loi exponentielle, $\hat{A}_t = S\wedge t$.
On retrouve dans ce cas l'exemple de MEYER ([2]-VII-54)

ETUDE DES POTENTIELS

Nous supposons toujours que $P\{0\} = 0$ et que $P\{S>t\} > 0$ pour tout t. D'autre part F désigne la fonction de répartition de P.

Nous nous bornerons à étudier les processus progressifs par rapport à $(\underline{F}_t^o)$
Si (X_t) est un processus progressif par rapport à $(\underline{F}_t^o)$, il existe une fonction borélienne f définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ et une fonction borélienne u définie sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$X_t = f(t,S).I_{\{S\leq t\}} + u(t).I_{\{S>t\}}$$

Si (X_t) est continu à droite, on peut supposer que u et $f(.,y)$ sont continues à droite sur $\mathbb{R}_+$ (pour tout y). D'autre part

$$E[|X_t|] = \int_0^t |f(t,y)|\; dF(y) + |u(t)|.(1-F(t))$$

Lorsque (X_t) est positif,

$$E[X_t] = \int_0^t f(t,y)\; dF(y) + u(t).(1-F(t))$$

et

$$E[X_S] = \int_0^\infty f(x,x)\; dF(x)$$

Supposons maintenant que X_t soit intégrable. Si $s \leq t$,

$$E[X_t | \underline{\underline{F}}_s] = X_t\; I_{\{S \leq t\}} + \frac{E[I_{\{S>t\}}\; X_t]}{P\{S>t\}}\; I_{\{S>t\}}$$

Donc $X_s - E[X_t | \underline{\underline{F}}_s]$ est égal à

i) $f(s,S) - f(t,S)$ sur $\{S \leq s\}$

ii) $u(s) - u(t)\,\dfrac{1-F(t)}{1-F(s)} - \dfrac{\int_s^t f(t,y)\; dF(y)}{1-F(s)}$ sur $\{S>s\}$

Si (X_t) est une surmartingale continue à droite, on peut alors supposer que $f(.,y)$ est une fonction monotone décroissante, continue à droite pour tout y. Si (X_t) est de plus positive, la fonction $t \to u(t)(1-F(t))$ est monotone décroissante et continue à droite.

THEOREME 5.- Tout potentiel est de la classe (D).

DEMONSTRATION.- Soit (X_t) un potentiel, i.e. une surmartingale positive continue à droite telle que $\lim_{t\to\infty} E[X_t] = 0$. Nous devons montrer que si (T_n) est une suite croissante de t.d'a. tendant vers $+\infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = 0$$

Pour chaque n il existe une fonction borélienne h_n telle que $T_n = h_n(S)$. Soit d'autre part

$$s_n = \inf\, \{t : \{T_n \leq t\} \supset]t,+\infty[\} \quad \text{(cf théorème 1)}$$

Alors (s_n) tend en croissant vers $+\infty$ et l'on a pour tout n

$$E[X_{T_n}] = \int_0^{s_n} f(h_n(x),x)\; dF(x) + u(s_n)(1-F(s_n))$$

D'une part

$$0 \leq u(s_n)(1-F(s_n)) \leq E[X_{s_n}]$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} u(s_n)(1-F(s_n)) = 0$$

D'autre part

$$0 \leq f(h_n(x),x)\ I_{\{x\leq s_n\}} \leq f(x,x)$$

puisque $T_n \geq S$ sur $\{S\leq s_n\}$ et que $f(.,x)$ est décroissante. Comme $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ (p.s.), on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} f(h_n(x),x) = 0$ pour chaque x. Comme

$$\int_0^{\infty} f(x,x)\ dF(x) = E[X_S] < +\infty$$

il résulte alors du théorème de LEBESGUE que $\lim_{n\to\infty} E[X_{T_n}] = 0$.

Si (X_t) est un potentiel de la classe (D), on peut trouver de manière heuristique la forme explicite du processus croissant naturel $(\hat{A}_t)$ qui engendre (X_t) en procédant comme plus haut. On trouve

$$\hat{A}_t = f(S\wedge t,S) - f(t,S) + u(0) - u(S\wedge t) + \int_0^{S\wedge t} [u(x) - f(x,x)]\ \frac{dF(x)}{1-F(x-)}$$

En particulier

$$\hat{A}_\infty = f(S,S) + u(0) - u(S) + \int_0^{S} [u(x) - f(x,x)]\ \frac{dF(x)}{1-F(x-)}$$

$$= X_0 + (X_S - X_{S-}) + \int_0^{S} [u(x) - f(x,x)]\ \frac{dF(x)}{1-F(x-)}$$

Dans le cas étudié précédemment, $X_t = I_{\{S>t\}}$ donc f est identiquement nulle et u est identiquement égale à 1. On retrouve alors la forme donnée pour $\hat{A}_t$ J'avoue ne pas avoir eu le courage de vérifier que le processus défini ci-dessus engendre effectivement (X_t).

CONSTRUCTION DE QUELQUES CONTRE-EXEMPLES

On suppose toujours que $P\{0\} = 0$ et que $P\{S>t\} > 0$ pour tout t.

1) Voici d'abord un exemple de surmartingale positive (X_t) telle que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ p.s. , qui ne soit pas un potentiel. Il suffit de prendre

$$X_t = \frac{I_{\{S>t\}}}{P\{S>t\}}$$

Il est clair que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$, tandis que $E[X_t] = 1$ pour tout t.

2) Soit Z une v.a. intégrable positive. La martingale continue à droite (M_t) telle que $M_t = E[Z|\underline{\underline{F}}_t]$ est donnée par la formule

$$M_t = Z.I_{\{S\leq t\}} + \frac{E[I_{\{S>t\}}.Z]}{P\{S>t\}} I_{\{S>t\}}$$

Soit $A_t = I_{\{S\leq t\}}$ et désignons par $(\hat{A}_t)$ le processus croissant naturel qui engendre le potentiel engendré par (A_t). Il résulte alors de [2]-VII-T16,19 et de [1]-310 que

$$E[M_{S-}] = E[\int_0^\infty M_{s-}\ dA_s] = E[\int_0^\infty M_{s-}\ d\hat{A}_s] = E[\int_0^\infty M_s\ dA_s] = E[Z.\hat{A}_\infty]$$

Prenons pour loi P la loi exponentielle et pour Z la v.a. définie par

$$Z = I_{\{S\leq 1\}} + S^{-2}.e^S.I_{\{S>1\}}$$

alors

$$E[Z] \leq 1 + \int_1^\infty x^{-2}e^x e^{-x}\ dx < +\infty$$

tandis que

$$E[M_{S-}] = E[Z.\hat{A}_\infty] = E[Z.S] \geq \int_1^\infty x^{-1}e^x e^{-x}\ dx = +\infty$$

La martingale (M_t) est alors uniformément intégrable et il existe un t.d'a. totalement inaccessible S tel que M_{S-} ne soit pas intégrable. En particulier, $\sup_t E[M_t] < +\infty$ tandis que $E[\sup_t M_t] = +\infty$.

3) Soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des v.a. intégrables Z telles que la martingale M_t défini ci-dessus soit quasi-continue à gauche (ou retorse suivant la terminologie adoptée. Cela signifie que la martingale n'a que des discontinuités totalement inaccessibles). Lorsque la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité, on sait que $\underline{\underline{H}}$ est égal à l'ensemble des v.a. intégrables (cf [2]-VII-T47). Dans le cas général, il peut arriver que $\underline{\underline{H}}$ contienne une v.a. non p.s. constante alors que toute indicatrice appartenant à $\underline{\underline{H}}$ est p.s. constante. Voici un exemple de cette situation. Prenons pour loi P une loi qui ne charge pas [0,1[, ayant une masse >0 en 1 et telle que la restriction de P à]1,+∞[soit une mesure diffuse non nulle. Si Z est une v.a. intégrable,

$$E[Z|\underline{\underline{F}}_1] = Z(1).I_{\{S=1\}} + \frac{E[I_{\{S>1\}}.Z]}{P\{S>1\}} I_{\{S>1\}} \quad \text{p.s.}$$

tandis que

$$E[Z|\underline{\underline{F}}_{1-}] = E[Z] \quad \text{p.s.}$$

Comme $\{1\}$ est un atome de P, on a alors

$$E[Z|\underline{\underline{F}}_1](1) - E[Z|\underline{\underline{F}}_{1-}](1) = Z(1) - E[Z]$$

Donc si Z appartient à $\underline{\underline{H}}$, $E[Z] = Z(1)$. Il est alors clair que Z ne peut être une indicatrice que si $Z=0$ ou $Z=1$ p.s. D'autre part, soit T le t.d'a. égal à $+\infty$ sur $[0,1]$ et à S sur $]1,+\infty[$; T est alors un t.d'a. totalement inaccessible qui n'est pas p.s. infini. Il résulte alors de [2]-VII-T46 que $\underline{\underline{H}}$ contient une v.a. qui n'est pas p.s. constante. On peut alors montrer grâce au théorème des classes monotones ([2]-I-T20) et aux inégalités classiques des martingales que $\underline{\underline{H}}$ ne peut être l'ensemble des v.a. intégrables mesurables par rapport à une sous-tribu de $\underline{\underline{F}}$.

APPENDICE

Nous allons établir quelques propositions relatives à la théorie générale des processus qui ne se trouvent pas dans [1]. Comme toujours, $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ désigne un espace probabilisé complet muni d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles.

La proposition suivante est un des lemmes clé pour l'étude des t.d'a. prévisibles :

PROPOSITION 1.- _Soient_ S _et_ T _deux temps d'arrêt_. _Si_ S _est prévisible_, _l'ensemble_ $\{S \leq T\}$ _appartient à_ $\underline{\underline{F}}_{T-}$.

DEMONSTRATION.- Soit (S_n) une suite croissante de t.d'a. telle que $S_n \leq S$ et $S_n < S$ sur $\{S>0\}$. Alors

$$\{S \leq T\} = \{S=0\} \cup [\bigcap_n \{S_n < T\}]$$

Il résulte alors de [1]-p155-prop 3 que $\{S \leq T\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T-}$.

La proposition de [1] citée ci-dessus affirme que $\{S < T\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T-}$ lorsque S et T sont quelconques. Lorsque S est prévisible, les ensembles

$\{S<T\}$, $\{S \leq T\}$ et $\{S = T\}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}_{T-}$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un t.d'a. accessible soit prévisible (cette condition est moins forte que [1] - 113)

PROPOSITION 2.- Soit S un t.d'a. accessible. Alors S est prévisible si et seulement si l'ensemble $\{S = T\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T-}$ pour tout t.d'a. prévisible T.

DEMONSTRATION.- La condition est évidemment nécessaire d'après la proposition précédente. Passons à la condition suffisante, Comme S est accessible, il existe d'après [3] une suite (S_n) de t.d'a. prévisibles telle que le graphe de S soit inclus dans la réunion des graphes des S_n. Par hypothèse, l'ensemble $\{S \leq S_n\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{S_n-}$ pour tout n. Posons alors $T_n = S_{n\{S \leq S_n\}}$ et $U_n = T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n$. Pour chaque n le t.d'a. U_n est prévisible ([1] - 109) D'autre part la suite (U_n) est décroissante, a pour limite S, et pour chaque ω il existe un entier n tel que $U_n(\omega) = S(\omega)$. Il résulte alors de [1] - p158 - prop 6 que le t.d'a. S est prévisible.

Voici pour terminer le théorème que nous avons utilisé au cours du premier paragraphe

PROPOSITION 3.- Les assertions suivantes sont équivalentes.

1) Les t.d'a. accessibles sont prévisibles

2) Pour tout t.d'a. prévisible T, $\underline{\underline{F}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}$ (soit $(\underline{\underline{F}}_t)$ est quasi-continue à gauche)

3) Pour toute suite croissante (S_n) de t.d'a. de limite S, $\underline{\underline{F}}_S = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$ (soit $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité)

DEMONSTRATION.- 3) => 2) d'après [1] - p155 - prop 5 . 2) => 1) d'après la proposition précédente. Nous allons montrer que 1) => 3). Soit U (resp V) la partie accessible (resp totalement inaccessible) de S et soit $A \in \underline{\underline{F}}_S$. Alors

$$A = (\{U_A = S\} - (A^c \cap \{S = \infty\})) \cup (\{V_A < \infty\} \cup (A \cap \{S = \infty\}))$$

Les ensembles $A^c \cap \{S = \infty\}$ et $A \cap \{S = \infty\}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}_{S-}$ d'après [1] - p155 - prop 3 et donc à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$ (même référence, prop 5). D'autre part, par hypothèse U_A ezt prévisible et donc $\{U_A = S\}$ appartient aussi à $\underline{\underline{F}}_{S-}$. Il reste alors à montrer que $\{V_A < \infty\}$ appartient à $\bigvee_n \underline{F}_{S_n}$. Mais V_A est totalement inaccessible et (S_n) est une suite croissante de t.d'a. majorés par V_A. Donc

$$\{V_A < \infty\} = \bigcup_n \{V_A = S_n < \infty\}$$

Il est alors clair que $\{V_A < \infty\}$ appartient à $\bigvee_n \underline{F}_{S_n}$ et cela achève la démonstration de la proposition.

B I B L I O G R A P H I E

[1] : MEYER (P.A.) : Guide détaillé de la théorie générale des processus (Séminaire de Probabilités II, Lecture Notes n°51, 1968)

[2] : Probabilités et Potentiel (Hermann, Paris, 1966)

[3] : Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt (Séminaire de Probabilités III, Lecture Notes n°88, 1969)