

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANCO CHERSI

Martingales et intégrabilité de $X \log^+ X$ d'après Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 37-46

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__37_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

1968-69

STRASBOURG

- Séminaire de Probabilités -

MARTINGALES ET INTÉGRABILITÉ DE $X \log^+ X$

d'après R.F. GUNDY

(exposé par F. CHERSI (*))

*

INTRODUCTION.

Ce qui suit expose la première partie du travail de R.F. GUNDY "On the Class $L \log L$, Martingales, and Singular Integrals" (à paraître)^(**), avec des modifications formelles seulement. Il faut cependant remarquer que le théorème 3 ci-dessous est une modification (due à G. LETTA) un peu plus forte que le résultat original.

La clé de toute la question est fournie par l'inégalité (1), valable dans certains cas, qui donne la réciproque d'une inégalité classique de Doob. Cela permet d'établir que l'intégrabilité de $X \log^+ X$ est aussi nécessaire dans des cas, où sa suffisance était déjà connue (voir les exemples I et II ci-dessous). Il s'agit ici de variables aléatoires positives seulement, tandis que les cas généraux correspondants sont traités dans les travaux de BURKHOLDER ([1], Theorem 1) et STEIN ([6], à paraître à ce moment), respectivement.

Dans la deuxième partie, GUNDY applique ces méthodes à la théorie des intégrales singulières.

(*) De l'Université de Pisa, hôte à Strasbourg, subventionné par le

Consiglio Nazionale delle Ricerche d'Italie.

(**) Studia Mathematica, XXXIII, 1969, p.109-118.

Dans la suite, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sera souvent sous-entendu.

LEMME 1.

Pour toute variable aléatoire positive X on a l'égalité

$$\int_{\Omega} X \log^+ X \, dP = \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{B_{\lambda}} X \, dP$$

où $B_{\lambda} = \{X > \lambda\}$.

DÉMONSTRATION.

Sur $\Lambda = \{X < 1\}$ on a $\log^+ X = 0$, et $\Lambda \cap B_{\lambda}$ est vide pour tout $\lambda \geq 1$; il suffit donc de vérifier l'égalité des intégrales faites sur $\{X \geq 1\}$, ce qui est immédiat, grâce au théorème de Fubini (*).

LEMME 2.

Soient X, Y deux v.a. positives et telles que l'on ait $X \leq Y$ p.s.; soient a, b deux nombres strictement positifs. Supposons que l'on ait, pour tout $\lambda \geq a$, l'inégalité

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} \int_{\{Y > \lambda\}} X \, dP \leq b P\{Y > \lambda\}$$

Si Y est intégrable, il en est de même de $X \log^+ X$.

(Cela est, partiellement, le réciproque d'un théorème de Doob : [3], page 317).'

DÉMONSTRATION.

Posons $\alpha = \max(1, a)$; puisque $\{X > \lambda\}$ est contenu dans $\{Y > \lambda\}$,

(*) Le lemme est valable sur tout espace de mesure $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, $\mu \geq 0$.

l'inégalité (1) donne

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP \leq b \int_0^{+\infty} P\{Y > \lambda\} d\lambda = b E[Y]$$

Le lemme 1 entraîne

$$E[X \log^+ X] = \int_1^{\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP$$

et la première intégrale à droite est finie, parce que X est intégrable.

THÉOREME 1.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une martingale positive, uniformément intégrable (^o).

Supposons qu'il existe $a > 0$ et $b \geq 1$ tels que l'on ait p.s.

$$(2) \quad X_{-\infty} \leq a, \quad X_n \leq b X_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

L'intégrabilité de $\sup_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ entraîne alors celle de $X_{\infty} \log^+ X_{\infty}$.

(L'implication inverse est vraie même sans (2) : Doob [3], page 317).

DÉMONSTRATION.

Posons $\sup_{n \in \mathbb{Z}} X_n = Y$ et, pour $\lambda \geq a$, $\Lambda_{\lambda} = \{Y > \lambda\}$; puisque X_n converge vers X_{∞} p.s., on a $X_{\infty} \leq Y$. Prouvons l'inégalité (1) pour ces variables aléatoires; puisque Λ_{λ} tend vers Λ_a en croissant lorsque $\lambda \downarrow a$, il suffit de la démontrer pour tout $\lambda > a$.

Définissons le temps d'arrêt

$$T_{\lambda}(\omega) = \begin{cases} \text{irf } \{n \in \mathbb{Z} : X_n(\omega) > \lambda\} \\ + \infty \end{cases} \quad \text{s'il n'y a pas de tels } n$$

(^o) On sait qu'on peut alors achever la martingale avec $X_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ et $X_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$; voir p.e. Meyer [5], pages 117-20.

Remarquons que, p.s., T_λ ne prend pas la valeur $-\infty$, parce que $\lim_{n \rightarrow -\infty} X_n = X_{-\infty} \leq a < \lambda$. Par conséquent, la deuxième des conditions (2) entraîne $X_{T_\lambda} \leq b\lambda$ p.s. (et cela est vrai aussi dans le cas où $T_\lambda = +\infty$). On a d'ailleurs $A_\lambda = \{T_\lambda < \infty\}$ et alors, d'après le théorème d'arrêt,

$$\int_{A_\lambda} X_\infty dP = \int_{\{T_\lambda < \infty\}^\lambda} X_{T_\lambda} dP \leq b\lambda P\{T_\lambda < \infty\} = b\lambda P(A_\lambda).$$

REMARQUE 1.

Si l'on a affaire à une martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (qui est toujours uniformément intégrable), ou bien à $(X_m)_{m \geq 1}$ uniformément intégrable, on se ramène à la situation envisagée ci-dessus en posant $X_n = X_{-1}$ pour $n \geq 0$ dans le premier cas, $X_m = X_1$ pour $m \leq 0$ dans l'autre.

EXEMPLE 1.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. intégrables, indépendantes et de même loi. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et $X_{-n} = \frac{1}{n} S_n$ pour $n \geq 1$ (donc $X_{-1} = Y_1$); le processus $(X_{-n})_{n \geq 1}$ est une martingale (uniformément intégrable) par rapport aux tribus $\dots \mathcal{F}_{-n} \subset \mathcal{F}_{-(n-1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{-1}$, où $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{G}\{S_p : p \geq n\}$ (on démontre en effet que les espérances $E[Y_i | \mathcal{F}_{-n}]$, $1 \leq i \leq n$, sont égales, d'où $\frac{1}{n} S_n = E[\frac{1}{n} S_n | \mathcal{F}_{-n}] = E[Y_1 | \mathcal{F}_{-n}]$; Doob [3], pages 341-42). Si les v.a. Y_n sont aussi positives, il s'agit d'une martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (remarque 1) uniformément intégrable, positive, qui vérifie les conditions (2), avec

$$a = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} S_n = E[Y_1] \quad \text{et} \quad b = 2.$$

D'après le théorème 1 on conclut alors : l'intégrabilité de $\sup_n \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$ entraîne celle de $Y_1 \log^+ Y_1$.

Le deuxième exemple sera fourni par des martingales " L^∞ -régulières" au sens de Chow [2] et Gundy [4].

DÉFINITION.

Une martingale $(X_n)_{n \geq 1}$, relative aux tribus $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_n \subset \dots$, est dite " L^∞ -régulière" si l'on a :

$$X_n = X_1 + \sum_{k=2}^n V_k D_k, \quad \text{où :}$$

- a) X_1 est constante ;
- b) chaque V_k est une v.a. \mathfrak{F}_{k-1} mesurable, intégrable ;
- c) chaque D_k est \mathfrak{F}_k -mesurable, intégrable, et $E[D_k | \mathfrak{F}_{k-1}] = 0$,
 $E[D_k^2 | \mathfrak{F}_{k-1}] = 1$ p.s. ;
- d) il existe un nombre fini d tel que pour tout k l'on ait $\|D_k\|_\infty \leq d$.

Un espace $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n \geq 1}, P)$ est appelé " L^∞ -régulier" si toutes les martingales sur cet espace sont L^∞ -régulières, avec la même borne d .

THÉOREME 2.

(Gundy [4], pages 727-728). Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé, et soit $(\mathfrak{F}_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de sous-tribus telle que :

- i) $\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$;
- ii) pour tout n , \mathfrak{F}_n est engendrée par une partition G_n de Ω , et G_{n+1} est plus fine que G_n ; pour tout atome A_n de G_n et tout A_{n+1} de G_{n+1} , avec $A_{n+1} \subset A_n$, on a

$$0 < \delta \leq \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} < 1$$

où δ est fixe (en particulier, chaque partition est finie).

L'espace $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n \geq 1}, P)$ est alors L^∞ -régulier.

DÉMONSTRATION.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$; il s'agit de v.a. étagées, et $E[X_2 | \mathcal{F}_1] = X_1$ est constante. En posant $Y_k = X_k - X_{k-1}$ ($k \geq 2$), on a $X_n = X_1 + \sum_{k=2}^n Y_k$; il nous faut représenter Y_k comme produit $V_k D_k$, avec les propriétés b), c), d). Posons alors

$$V_k = (E[Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}])^{\frac{1}{2}} ; \text{ b) est vérifiée .}$$

Soit A un atome de G_{k-1} , divisé en atomes $B_j \in G_k$ ($1 \leq j \leq m \leq \delta^{-1}$) ; $Y_k |_{A} = \sum_j \alpha_j I_{B_j}$ et $E[Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] |_{A} = \frac{\sum_j \alpha_j^2 P(B_j)}{P(A)}$; donc $V_k |_{A} = c_A \geq 0$, nulle si et seulement si $Y_k |_{A} = 0$. Définissons D_k en posant :

$$D_k = \begin{cases} D'_k = \frac{Y_k}{V_k} & \text{sur } \{V_k > 0\} \\ D''_k & (\text{à déterminer}) \text{ sur } \{V_k = 0\} ; \end{cases}$$

D'_k vérifie c) : En outre, si $V_k > 0$ sur A , sur chaque atome B_j on a $D_k^2 = \frac{\alpha_j^2}{\sum_{\ell} \alpha_{\ell}^2 P_{\ell}}$, où $P_{\ell} = \frac{P(B_{\ell})}{P(A)} \geq \delta > 0$; il en résulte $\max_j \frac{\alpha_j^2}{\sum_{\ell} \alpha_{\ell}^2 P_{\ell}} \leq \delta^{-1}$; donc $|D'_k| \leq \delta^{-\frac{1}{2}}$ p.s., et cela pour tout $k \geq 2$.

Sur $\{V_k = 0\} = \{Y_k = 0\}$, n'importe quel D''_k vérifie l'égalité $Y_k = V_k D''_k$; définissons-le de façon qu'il ait les propriétés c), d).

Si $V_k = 0$ sur A , posons ici $D''_k = \sum_{j=1}^m \gamma_j I_{B_j}$; les conditions

$$\text{c) s'écrivent alors } \begin{cases} \sum_{j=1}^m \gamma_j P_j = 0 \\ \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 P_j = 1 \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^m = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_m)\}$ la deuxième équation représente une ellipse contenue dans la boule $|\gamma|^2 \leq \delta^{-1}$ (parce que $P_j \geq \delta$) : il y a des solutions du système, avec $|\gamma| \leq \delta^{-\frac{1}{2}}$. Donc D''_k aussi vérifie c) et d), avec $d = \delta^{-\frac{1}{2}}$.

THÉOREME 3.

Pour toute martingale $(X_n)_{n \geq 1}$ L^∞ -régulière et positive, il existe $b \geq 1$ tel que $X_n \leq b X_{n-1}$ p.s. pour tout $n > 1$.

LEMME 3 (*).

Sur (Ω, \mathcal{F}, P) soient G une sous-tribu, et X une v.a. positive telle que $E[X|G] \geq \alpha > 0$ p.s. Soit ϵ un nombre tel que $0 < \epsilon < \alpha$, et posons $\Lambda = \{X \geq \epsilon\}$. On a alors $P[\Lambda|G] > 0$ p.s.

DÉMONSTRATION du lemme.

On a :

$$\alpha \leq E[X|G] = E[XI_\Lambda|G] + E[XI_{\Lambda^c}|G] \leq E[XI_\Lambda|G] + \epsilon, \text{ d'où } E[XI_\Lambda|G] \geq \alpha - \epsilon > 0.$$

Soient $J = E[I_\Lambda|G]$ p.s. et $N = \{J = 0\}$: prouvons que $P(N) = 0$.

Puisque $N \in G$, on a

$$P(\Lambda \cap N) = \int_N J \, dP = 0, \text{ d'où}$$

$$0 = \int_{\Lambda \cap N} X \, dP = \int_N X I_\Lambda \, dP \geq (\alpha - \epsilon) P(N)$$

donc $P(N) = 0$.

DÉMONSTRATION du théorème.

On a $X_n = X_{n-1} + V_n D_n$ ($n > 1$) ; nous allons voir que

$|V_n| \leq 2d X_{n-1}$ p.s. (où d est la borne des $|D_k|$), et par conséquent

$$X_n \leq X_{n-1} + 2d^2 X_{n-1} = (1 + 2d^2) X_{n-1}.$$

Il suffit de prouver que l'on a $V_n \leq c X_{n-1}$ p.s. pour tout $c > 2d$,

(*) C'est une forme faible d'un lemme de Paley et Zygmund ; on trouve celui-ci dans Gundy [4], page 728.

car on passe puis à la limite le long d'une suite $c_m \downarrow 2d$, et l'on obtient l'inégalité pour $-V_n$ de la représentation $X_n = X_1 + \sum_{k=2}^n (-V_k)(-D_k)$.

Posons donc $B = \{V_n > c X_{n-1}\}$, qui appartient à \mathcal{F}_{n-1} , et

$\Lambda = \{-D_n \geq \frac{1}{c}\} = \{D_n^- \geq \frac{1}{c}\}$. Sur $\Lambda \cap B$ on aurait $-V_n D_n > X_{n-1}$, i.e.

$V_n D_n < -X_{n-1}$, ce qui est impossible parce que $V_n D_n = X_n - X_{n-1}$; donc

$B \cap \Lambda = \emptyset$. On a d'ailleurs $E[D_n^- | \mathcal{F}_{n-1}] = \frac{1}{2} E[|D_n| | \mathcal{F}_{n-1}] \geq \frac{1}{2d} E[D_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = \frac{1}{2d}$ (parce que $E[D_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ et $D_n^2 \leq d|D_n|$). Puisque $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{2d}$, on peut appliquer le lemme à D_n^- et l'on trouve $P[\Lambda | \mathcal{F}_{n-1}] > 0$ p.s. Il en résulte que l'égalité

$$0 = P(B \cap \Lambda) = \int_B E[I_\Lambda | \mathcal{F}_{n-1}] dP$$

entraîne $P(B) = 0$.

COROLLAIRE.

La martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, que l'on obtient selon la remarque 1, vérifie alors les conditions (2), avec $a = X_1$.

EXEMPLE II.

Soit X une v.a. positive, intégrable (avec espérance non nulle), définie sur le cube unitaire de \mathbb{R}^m . Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ la famille croissante de tribus, dans laquelle $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ et les autres sont engendrées par des partitions dyadiques de plus en plus fines, de sorte que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}, P)$ (où P est la mesure de Lebesgue) est un espace L^∞ -régulier; \mathcal{F}_∞ est la tribu borélienne du cube. Posons

$$X_n = E[X | \mathcal{F}_n] \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } X_n = X_1 = E[X]$$

pour $n \leq 0$; $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est alors une martingale uniformément intégrable, positive, qui vérifie les conditions (2) (d'après le théorème 3 et son corollaire). En outre $X_\infty = X$ p.s.

Appelons X^* la fonction maximale relative à X (en tout point ω du cube, $X^*(\omega)$ est le sup des moyennes de X sur tous les rectangles qui contiennent ω ; voir p.e. Zygmund [7] , page 306). Sur chaque atome

$$\Lambda \in \mathfrak{X}_n, X_n|_{\Lambda} = \frac{1}{P(\Lambda)} \int_{\Lambda} X \, dP : \text{donc } \sup_{n \in \mathbb{Z}} X_n \leq X^* .$$

Le théorème 1 entraîne alors le résultat suivant : si X^* est intégrable, il en est de même de $X \log^+ X$.

Dans le cas $m = 1$ et pour des v.a. positives, cela fournit la réciproque d'une proposition classique (Zygmund, page 306).

*** **

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.L. BURKHOLDER "Successive Conditional Expectations of an Integrable Function", Ann. Math. Statist., vol. 33, 1962, p. 887-893.
- [2] Y.S. CHOW "Martingales in a σ -Finite Measure Space Indexed by Directed Sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, 1960, p. 254-285.
- [3] J.L. DOOB "Stochastic Processes", Wiley, 1953.
- [4] R.F. GUNDY "The Martingale Version of a Theorem of Marcinkiewicz and Zygmund", Ann. Math. Statist., vol. 38, 1967, p. 725-734.
- [5] P.A. MEYER "Probabilités et Potentiel", Hermann, 1966.
- [6] E.M. STEIN "Note on the Class $L \log L$ ", Studia Math., vol. 32, 1969.
- [7] A. ZYGMUND "Trigonometric Series" vol. II, Cambridge, 1959.

*** **