GABRIEL MOKOBODZKI

Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 195-207
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__195_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

QUELQUES PROPRIETES REMARQUABLES DES OPERATEURS PRESQUE POSITIFS

par Gabriel MOKOBODZKI

*

Cet exposé fait suite à celui intitulé "Densité relative de deux potentiels comparables" dont on utilisera les définitions et les résultats.

Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur $(X,\mathcal{B})$. On suppose que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ est un noyau borné. On désigne par C et S respectivement le cône des fonctions surmédianes et le cône des fonctions excessives pour la famille résolvante (V_λ), enfin F désigne l'ensemble de toutes les applications de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.

DEFINITION 1.

On dira qu'un opérateur D de C dans F est presque positif s'il vérifie la condition suivante :

(P.P.) $[v_1, v_2 \in C,\ v_1 \geq v_2, v_1(x) = v_2(x)] \Rightarrow [D\, v_1(x) \leq D\, v_2(x)]$.

Cette définition est empruntée à WALDENFELS [4], avec une légère modification.

Exemple.

Si N est un noyau, et $\lambda > 0$, $D = \lambda(I-N)$ est un opérateur presque positif. En particulier, les opérateurs $D_\lambda = \lambda(I-\lambda V_\lambda)$ sont presque positifs. Il résulte des propriétés suivantes que les opérateurs $\limsup_{\lambda\to\infty} D_\lambda$,

$\liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sont presque positifs.

<u>Propriétés immédiates</u>.

a) Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur la famille des opérateurs presque positifs définis sur C.

L'opérateur $D = \lim_{\mathcal{U}}$ défini par $D_o v(x) = \lim_{\mathcal{U}} Dv(x)$ $\forall x \in X$, $v \in C$ est presque positif.

b) Si D est presque positif et si φ est une application croissante de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'opérateur $\varphi \circ D$ est presque positif.

c) Si D_1 et D_2 sont presque positifs,

$\sup(D_1,D_2) : v \mapsto \sup [D_1(v),D_2(v)]$

et $\inf(D_1,D_2) : v \to \inf [D_1(v),D_2(v)]$ sont des opérateurs presque positifs.

d) Si D_1, D_2 sont presque positifs et si $D_1 v(x) > -\infty$ $\forall v \in C$ et $x \in X$, alors $D_1 + D_2$ est presque positif.

e) Si D est presque positif, $D(\inf(v_1,v_2)) \geq \inf(D(v_1),D(v_2))$.

Considérons la famille $\mathcal{E}$ des opérateurs presque positifs sur C satisfaisant aux conditions suivantes

a) $D(w_1 + w_2) \geq D(w_1) \geq 0 \qquad \forall (w_1,w_2) \in C$.

b) $D(w) \geq 0 \qquad \forall w \in C$ et $D(w+\varepsilon V_1) \leq Dw + \varepsilon DV_1$ $\forall w \in C$ et $\varepsilon > 0$

c) Pour toute fonction $\varphi \geq 0$ de la forme $\varphi = g_1 - g_2$ où g_1 et g_2 sont excessives bornées, on a

$$DV\varphi = \varphi$$

La famille $\mathcal{E}$ n'est pas vide, car elle contient les opérateurs $\limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ et $\liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$.

On se propose d'abord d'établir le résultat suivant (théorème 5 ci-dessous).

Soit $D \in \mathcal{E}$, et soit $\varphi \geq 0$, mesurable et bornée. Alors $DV\varphi = \limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda V \varphi$ V-presque partout. Si, en outre φ est mesurable pour la tribu engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout.

Si l'on remarque que les opérateurs définis par

$$\overline{D}w(x) = \sup_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

$$\underline{D}w(x) = \inf_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

appartiennent encore à $\mathcal{E}$, on voit que les ensembles V-négligeables considérés ne dépendent que de φ , et peuvent être choisis indépendamment de D .

Nous n'utiliserons pas immédiatement toutes les hypothèses précédentes. Nous supposerons seulement dans la suite que D est un opérateur presque positif sur C satisfaisant aux conditions a), b) et à la condition c') suivante

c') $DV1$ est fini V-presque partout.

Cette condition résulte de c), car si φ est la régularisée excessive de la fonction surmédiane 1 , on a $DV1 = DV\varphi = \varphi$ si c) est satisfaite. Par exemple, l'opérateur $\sup_\lambda D_\lambda$ satisfait à a) , b), c') .

Nous désignerons par D_o , dans toute la suite, l'opérateur $\limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sur C .

THEOREME 2.

Soient (u_n) et $(v_n) \subset C$ deux suites telles que

a) $u_n \prec V_1$ pour tout n

b) la suite $(u_n - v_n)$ converge simplement V-presque partout vers 0 .

Dans ces conditions, pour toute fonction excessive w, la suite $R(u_n-v_n+w)$ converge simplement partout vers w.

DEMONSTRATION

Montrons d'abord que la suite $R(u_n-v_n)$ tend simplement partout vers 0.

Pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$R(u_n-v_n) \leq R(u_n-v_n-\varepsilon)+\varepsilon$$

et si $A_n = \{u_n-v_n \geq \varepsilon\}$, on a $R(u_n-v_n-\varepsilon) \prec V 1_{A_n}$

(Prop. 12 de l'exposé précédent). Comme $\lim (u_n-v_n) = 0$ V-presque partout, l'ensemble $E=\bigcap_p \left(\bigcup_{m\geq p} A_m\right)$ est V-négligeable, $\lim V1_{A_n} = 0$ et $\lim R(u_n-v_n-\varepsilon)=0$. Ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a bien $\lim R(u_n-v_n) = 0$.

Soit maintenant w excessive ; on a toujours

$$R(u_n-v_n+w) \leq R(u_n-v_n)+ w$$

d'où
$$\limsup_{n\to\infty} R(u_n-v_n+w) \leq w .$$

Rappelons que si v est surmédiane, $\hat{v} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda$ est excessive et que $v=\hat{v}$ V-presque partout. On a alors

$$\liminf(u_n-v_n+w) \leq \liminf R(u_n-v_n+w) \leq w$$

La fonction $s = \liminf R(u_n-v_n+w)$ est surmédiane et $s=w$ V-presque partout ; on a donc $\hat{s}= w$. D'autre part $\hat{s} \leq s$ et $s \leq w$, donc $s=w$ partout, d'où enfin $\lim_{n\to\infty} R(u_n-v_n+w) = w$ partout.

LEMME 3.

Soient $w\in C$, (u_n) une suite de fonctions excessives telles que $u_n = V\varphi_n$ $(\varphi_n \geq 0)$ et $u_n \prec w$ pour tout n. Pour l'ordre défini par le cône S des fonctions excessives, la borne supérieure u de la suite (u_n) est donnée par

$$u = V(\sup_n D_o u_n)$$

et on a $D_o u = \sup_n D_o u_n$ V-presque partout.

<u>DEMONSTRATION</u>

Si $v \in S$ et $v \succ u_n$ pour tout n on a $D_o v \geq \sup_n D_o u_n$, donc $v \succ VD_o v \succ V(\sup_n D_o u_n) \succ VD_o u_n = u_n$ pour tout n d'après le théorème 15 et le corollaire 16 de l'exposé précédent. On a donc bien $V(\sup_n D_o u_n) = u$.
On a aussi $D_o u \geq D_o u_n$ pour tout n, d'où

$$V(D_o u - \sup_n D_o u_n) = 0$$

Rappelons que D satisfait à a), b) et c') :

<u>THEOREME 4.</u>

Soient deux suites (u_n) et $(v_n) \subset C$ telles que

a) $u_n \prec V1$ et

b) pour toute fonction excessive w, $\lim_{n \to \infty} R(u_n - v_n + w) = w$

Dans ces conditions

$$\limsup Du_n \geq \liminf Dv_n \quad \text{V-presque partout.}$$

<u>DEMONSTRATION</u>

Posons $D_o v = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(v - \lambda V_\lambda v)$ pour tout $v \in C$. Choisissons $\varepsilon > 0$, et pour tout n, posons $A_n^\varepsilon = \{R(u_n - v_n + \varepsilon V1) = u_n - v_n + \varepsilon V1\}$.

D'après le théorème 20 de l'exposé précédent, on a $D_o(R(u_n - v_n + \varepsilon V1)) = 0$ V-presque partout dans l'ensemble mesurable $\complement A_n^\varepsilon$.

Posons $B = \bigcup_n A_n^\varepsilon$ et montrons que $\complement B$ est V-négligeable.

Pour l'ordre défini par le cône S , soit u la borne supérieure de la famille $(R(u_n-v_n+\varepsilon V1))$. D'après le lemme 3, on a (comme $R(u_n+\varepsilon V1-v_n) \prec u_n + \varepsilon V1 \prec (1+\varepsilon)V1$:

$$D_o u = \sup_n D_o(R(u_n-v_n+\varepsilon V1)) \quad V\text{-presque partout}$$

donc $\qquad D_o u = 0$ V-presque partout dans $\complement B$.

Par hypothèse $\lim_n R(u_n-v_n+\varepsilon V1) = \varepsilon V1$, par suite on a aussi $\varepsilon V1 \prec u$ et $0 \leq D_o(\varepsilon V1) \leq D_o u \leq 0$ V-presque partout dans $\complement B$. On a $D_o(\varepsilon V1) = \varepsilon.(\sup_\lambda \lambda V_\lambda 1)=\varepsilon$ V-presque partout. On en conclut que $\complement B$ est V-négligeable.

Pour tout $x \in A_n^\varepsilon$, on a

$$u_n + \varepsilon V1 \leq R(u_n-v_n + \varepsilon V1) + v_n$$

et

$$(u_n+ \varepsilon V1)(x) = R(u_n-v_n+\varepsilon V1)(x) + v_n(x)$$

L'opérateur D étant presque positif et satisfaisant à la condition a), on en déduit que $D(u_n+\varepsilon V1)(x) \geq Dv_n(x)$ pour $x \in A_n^\varepsilon$. Posons alors $E_\varepsilon = \bigcap_p (\bigcup_{m\geq p} A_m^\varepsilon)$; cet ensemble est mesurable, $\complement E_\varepsilon$ est V-négligeable et pour tout $x \in E_\varepsilon$ $\limsup D(u_n+\varepsilon V1)(x) \geq \liminf Dv_n(x)$. En prenant $E=\bigcap_n E_{1/n}$, en tenant compte de l'inégalité $D(u_n+\varepsilon V1) \leq D(u_n) + \varepsilon\, DV1$ et du fait que $DV1$ est fini V-presque partout, on a

$$\limsup D(u_n)(x) \geq \liminf Dv_n(x) \qquad \forall x \in E \ .$$

Ce qui prouve le théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le premier résultat annoncé au début de l'exposé.

<u>THEOREME 5</u>.

Soit D un opérateur presque positif sur C appartenant à ξ, c'est-à-dire :

a) $D(v_1 + v_2) \geq D(v_1) \geq 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in C$

b) $D(u+\varepsilon V1) \leq D(u) + \varepsilon D(V1) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall u \in C$

c) Pour toutes fonctions excessives g_1, g_2 bornées, telles que $g_1 \geq g_2$, on a $D\,V(g_1-g_2) = g_1-g_2$.

Dans ces conditions, pour tout $u \in C$, $u \prec V1$, on a V-presque partout

$$\liminf_{n\to\infty} n(u-V_n u) \leq Du \leq \limsup_{n\to\infty} n(u-nV_n u)$$

DEMONSTRATION

L'outil essentiel sera le théorème 4. Considérons la suite $u_n = nV_n u$. On a $u_n = nV(u-nV_n u)$ et comme $u \prec V1$, on a $u-nV_n u \leq V1-nV_n V1 = V_n 1$, et par suite $u_n \prec V1$ pour tout n.

Considérons maintenant la suite constante $v_n = u$, et appliquons les théorèmes 2 et 4 ; on obtient

$$\limsup Du_n \geq Du \qquad \text{V-presque partout}$$

et d'après c)

$$\limsup_{n\to\infty} n(u-V_n u) \geq Du \qquad \text{V-presque partout}$$

Si l'on échange les suites (u_n) et (v_n) pour appliquer le théorème 4, ce qui est possible dans ce cas particulier on obtient, V-presque partout

$$Du \geq \liminf_{n\to\infty} Du_n \qquad \text{et d'après c)}$$

$$Du \geq \liminf_{n\to\infty} n(u-nV_n u) \qquad \text{V-presque partout}$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE 6.

Pour tout $u \in S$ tel que $u \prec kV1$, la fonction Du est V-mesurable et l'on a

$$u = VDu$$

pour tout opérateur presque positif $D \in \mathcal{E}$.

Nous retournons maintenant au cas plus général d'un opérateur presque positif D satisfaisant à a), b) et c') .

THEOREME 7.

Pour $w \in C$ et $\varphi \geq 0$ bornée , si $Dw(x) > D(V\varphi)(x)$ V-presque partout, alors $w \geq V\varphi$.

DEMONSTRATION.

Si l'on n'a pas $V\varphi \leq w$, alors $R(V\varphi - w) \not\leq 0$ et si $A = \{R(V\varphi - w) = V\varphi - w\}$ et $k = \sup \varphi$, on a $R(V\varphi - w) \prec k.V1_A$ (th. 12 de l'exposé précédent). L'ensemble A n'est pas V-négligeable, il existe donc $x \in A$ tel que $Dw(x) > DV\varphi(x)$. Mais ceci est contradictoire ; en effet, on a

$$V\varphi - R(V\varphi - w) \leq w$$

et $$[V\varphi - R(V\varphi - w)](x) = w(x)$$

ce qui impliquerait $DV\varphi(x) \geq Dw(x)$.

THEOREME 8

On suppose de plus que $D(0) = 0$ et que D est positivement homogène sur C . Alors pour toute fonction surmédiane w , Dw est finie V-presque partout.

DEMONSTRATION

La suite $u_n = 0$, et la suite $v_n = \frac{1}{n} w$ satisfont aux conditions des théorèmes 2 et 4 , par suite

$$0 = D(0) \geq \inf_n (\frac{1}{n} Dw) \quad \text{V-presque partout, ce qui}$$

prouve le théorème.

COROLLAIRE 9

Pour toute fonction surmédiane w ,

$$s = \sup_{\lambda > 0} \lambda(w - \lambda V_\lambda w) \quad \text{est finie V-presque partout.}$$

DEMONSTRATION

L'opérateur $v \mapsto \sup_\lambda \lambda(v-\lambda V_\lambda v)$ est sous-additif, positivement homogène et $\lambda(V1-\lambda V_\lambda 1) = \lambda V_\lambda 1$, de sorte que l'on peut appliquer le théorème précédent.

THEOREME 10

Désignons par Γ_1 et Γ_2 respectivement les ensembles de fonctions mesurables positives bornées φ telles que $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout et $DV\varphi \leq \varphi$ V-presque partout .

Alors pour toute suite bornée $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$ et pour toute suite bornée $(\psi_n) \subset \Gamma_2$,

$$\limsup \varphi_n \in \Gamma_1$$

et $$\liminf \psi_n \in \Gamma_2$$

DEMONSTRATION.

Raisonnons seulement pour Γ_1 , car on procède de la même manière pour Γ_2 .

On remarque immédiatement que Γ_1 contient les enveloppes supérieures des suites contenues dans Γ_1 . Il suffit donc de montrer que pour une suite décroissante $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$, $\inf \varphi_n \in \Gamma_1$. Posons $v_n = V\varphi_n$ et $u_p = \inf_n V\varphi_n$, $\forall_p$. On se trouve dans les conditions d'application du théorème 4, par suite

$$\limsup Du_p = D(\inf V\varphi_n) \geq \liminf DV\varphi_n \geq \inf \varphi_n \quad \text{V-presque}$$

partout, par suite $(\inf \varphi_n) \in \Gamma_1$.

Remarque 11

Soit B^+ le cône des fonctions mesurables positives bornées, et soit N un opérateur croissant de B^+ dans B^+ tel que pour toute suite bornée croissante $(\varphi_n) \subset B^+$, on ait $N(\sup \varphi_n) = \sup_n N(\varphi_n)$ V-presque partout et pour toute suite décroissante $(\varphi_n) \subset B^+$.

$$N(\inf_n \varphi_n) = \inf_n N(\varphi_n) \qquad \text{V-presque partout}$$

On aurait un théorème analogue au théorème 10 pour les ensembles $\Gamma'_1 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \geq N\varphi \text{ , V-p.p.}\}$ et $\Gamma'_2 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \leq N\varphi \text{ , V-p.p.}\}$.

Remarque 12.

Les théorèmes précédents n'exigent pas que pour $w \in C$, la fonction Dw soit mesurable sur X.

Nous achevons de montrer le résultat annoncé au début de l'exposé.

COROLLAIRE 13.

Soit un opérateur $D \in \mathcal{E}$. Si $\varphi \geq 0$ est bornée, mesurable pour la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout.

DEMONSTRATION

Soit $H = C - C$ l'espace vectoriel réticulé des différences de fonctions surmédianes. Pour toute $\varphi \in H^+$ on a $\lim_{n \to \infty} nV_n \varphi = \varphi$ V-presque partout ; d'après le théorème 5, on a $DV\varphi = D_o V\varphi = \varphi$ V-presque partout (cf le corollaire 17 de l'exposé précédent). Le théorème 10 entraîne alors, par un raisonnement de classes monotones, que l'ensemble Γ des fonctions $\varphi \geq 0$ telles que $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout contient toutes les fonctions $\mathcal{B}'$-mesurables bornées.

Le théorème suivant comprend comme cas particulier le "théorème maximal de HARDY-LITTLEWOOD" sur la droite. Il précise beaucoup le corollaire 9 .

THEOREME 14

Soit D un opérateur presque positif sur C vérifiant les propriétés suivantes

a) $D(v_1+v_2) \geq D(v_1) \geq 0$ $\qquad \forall v_1, v_2 \in C$

b) $D(u+\varepsilon V1) \leq Du + \varepsilon DV1$ $\qquad \forall u \in C$ et $\forall \varepsilon > 0$.

c) Pour tout $k \geq 0$, $D(Vk) = kDV1 = k$, V.p.p.

d) Pour toute fonction $\varphi \geq 0$, bornée, mesurable pour la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout.

Dans ces conditions, pour toute $w \in C$, telle que Dw soit $\mathcal{B}'$-mesurable et tout $k > 0$, on a

$$w \geq k \quad V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Soit $\varphi = k.1_{\{Dw<k\}}$. On a par hypothèse $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout, par suite $D(w+V\varphi) \geq \sup(Dw, DV\varphi) \geq k$ V-presque partout. D'après le théorème 7, pour tout $k' < k$, on a $w+V\varphi \geq k'V1$, donc aussi $w+V\varphi \geq kV1$ ce qui donne encore $w \geq kV(1- 1_{\{Dw<k\}})$

ou $\qquad w \geq kV1_{\{Dw \geq k\}}$.

COROLLAIRE 15

Si $Dw = \sup\limits_{\lambda>0} \lambda(w-\lambda V_\lambda w)$, alors pour toute fonction surmédiane w , on a

$$w \geq k \ V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Les conditions a) , b) , c) du théorème 14 sont immédiatement vérifiables.

Pour la condition d), on a

$$DV\varphi \geq D_o V\varphi = \limsup_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda \varphi \geq \varphi \quad \text{V-presque partout d'après}$$

le corollaire 13 appliqué à D_o .

Remarque 16

Si au lieu de prendre la fonction surmédiane 1, on prend $u \in C$, $u(x) > 0$ $\forall x \in X$, et u finie, on a, si Vu est finie,

$$w \geq kV1_{\{Dw \geq kDVu\}} \cdot u \text{ , pour tout } w \in C \text{ , en}$$

conservant les notations du corollaire 15 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] COURREGE Philippe — Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum. Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY (Théorie du Potentiel) 1965-1966 n°2. Secrétariat Mathématique. 11, rue Pierre Curie. Paris Ve .

[2] MOKOBODZKI Gabriel — Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans filtres rapides. Séminaire CHOQUET (Analyse fonctionnelle). 1968-1969 n°1. Secrétariat Mathématique.Paris.

[3] MOKOBODZKI Gabriel — Densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire de Probabilités. 1968-1969. Strasbourg

[4] von WALDENFELS (W.) — Fast positive Operatoren. Berichte der Kernforschungs-anlage.Jülich 1964.