SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

**Quelques inégalités sur les martingales, d'après Dubins et Freedman**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 162-169
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__162_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

# QUELQUES INÉGALITÉS SUR LES MARTINGALES, D'APRÈS DUBINS ET FREEDMAN

(P.A.Meyer)

L'un des progrès essentiels de la théorie des martingales a consisté en une série d'inégalités reliant une martingale $(X_n)$ à temps discret, et sa "variation quadratique" $\sum_n (X_{n+1}-X_n)^2$ [ les inégalités de BURKHOLDER ] . Avant BURKHOLDER, DUBINS et FREEDMAN ont donné d'autres inégalités liant $(X_n)$ et la variable aléatoire $\sum_n E[(X_{n+1}-X_n)^2|\underline{\underline{F}}_n]$, qui joue elle aussi le rôle d'une variation quadratique ( noter l'analogie avec les deux processus croissants $[X,X]$ et $\langle X,X\rangle$ associés à une martingale de carré intégrable ). Nous allons exposer ici les résultats de DUBINS et FREEDMAN.(*)

Il faut noter que ceux-ci sont plus élémentaires que ceux de BURKHOLDER, et qu'ils se réduisent, dans le cas particulier où $(X_n)$ est une somme de variables aléatoires indépendantes centrées de carré intégrable, à des résultats classiques ( cas particuliers de la loi forte des grands nombres, du lemme de BOREL-CANTELLI, etc ).

## § 1 . MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

NOTATIONS.- $(\underline{\underline{F}}_n)_{n\geq 0}$ est une famille croissante de tribus, sur un espace probabilisé complet $\Omega$ ; $\underline{\underline{F}}_0$ contient les ensembles de mesure nulle.

$(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable, par rapport à cette famille ; nous supposerons toujours que $Y_0$ est une constante y ( ce qui ne restreint pas essentiellement la généralité ). Nous posons $\Delta Y_0=Y_0$ , $\Delta Y_1=Y_1-Y_0, \ldots \Delta Y_n=Y_n-Y_{n-1}$.

Nous posons $V_0=v$, une constante positive, $V_1=V_0+E[(\Delta Y_1)^2|\underline{\underline{F}}_0]\ldots$ $V_n=V_{n-1}+E[(\Delta Y_n)^2|\underline{\underline{F}}_{n-1}]$. Bien noter que $V_i$ est $\underline{\underline{F}}_{i-1}$-mesurable. Le processus $(Y_n^2-V_n)$ est une martingale, de sorte que $(V_n)$ est le processus croissant naturel associé à $(Y_n)$, à la constante v près.

---

(*) L.DUBINS et D.FREEDMAN ; a sharper form of the Borel-Cantelli lemma and the strong law. Ann. of Math. Stat., vol.36, 1965, p.800-807.

Lorsque les variables aléatoires $Y_n$ sont des sommes de variables aléatoires indépendantes, centrées, de carré intégrable, on a ( en prenant y=0,v=0) $V_n = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$ .

EXTENSION DU LEMME DE BOREL-CANTELLI ET DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Le point de départ est l'ingénieux lemme suivant :

LEMME.- Soit $\Theta$ une loi sur $\underline{\underline{R}}$ ayant une moyenne m et une variance $\sigma^2$ . On suppose $-\frac{m}{\sigma^2} \geqq a>0$ ( ce qui entraîne m<0 ). Soit $q_a$ la fonction sur $\underline{\underline{R}}$

$$q_a(x) = 1 \text{ si } x \geqq 0 \qquad ; \; q_a(x) = \frac{1}{1-ax} \text{ si } x < 0 \; .$$

Alors pour tout x on a $\int q_a(x+y)\Theta(dy) \leqq q_a(x)$ ($q_a$ est $\Theta$-excessive!)

DÉMONSTRATION.- C'est clair pour $x \geqq 0$. Si x<0, soit x'=x+m < x, et soit $r(x'+u) = q_a(x') + (u+au^2)q_a'(x')$ ; le graphe de r est une parabole tangente au graphe de $q_a$ au point x'. En notant que $q_a'(x') = aq_a^2(x')$, il vient

$$r(0) = q_a(x') + aq_a^2(-x'+ax'^2) = [q_a(x') - ax'q_a(x')] +$$
$$ax'q_a(x')[1+ax'q_a(x') - q_a(x')] = 1 = q_a(0)$$

la parabole représentant r, et l'hyperbole représentant $q_a$ à gauche de 0, ont donc 4 points communs déjà connus : un à l'infini, un double en x', un en 0. Le contact en x' est donc simple, et les deux courbes ne se traversent pas en x', donc $q_a(y) \leqq r(y)$ pour $y \leqq 0$, et aussi évidemment pour $y \geqq 0$. Alors

$$\int q_a(x+y)\Theta(dy) \leqq \int r(x+y)\Theta(dy) = \int r(x'+y-m)\Theta(dy) =$$
$$= q_a(x') + q_a'(x')[\int(y-m)\Theta(dy) + a\int(y-m)^2\Theta(dy)]$$
$$= q_a(x') + a\sigma^2 q_a'(x') \leqq q_a(x') + (x-x')q_a'(x') \leqq q_a(x) \text{ (convexité).}$$

Le lemme est établi. En voici une première application.

PROPOSITION 1.- Pour tout a>0, posons $Z_n = Y_n - aV_n$ ; alors les variables aléatoires $q_a \circ Z_n$ forment une surmartingale.

En effet, soit $\Theta_n(\omega,dy)$ la répartition conditionnelle de $\Delta Z_n$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_{n-1}$ ; la moyenne conditionnelle est $-a\Delta V_n$, la variance conditionnelle $\Delta V_n$, donc le lemme s'applique à $\Theta_n$, et il vient

$$E[q_a(Z_n)|\underline{\underline{F}}_{n-1}] = \int q_a(Z_{n-1}+u)\Theta_n(.,du) \leqq q_a(Z_{n-1}) \qquad \text{CQFD .}$$

PROPOSITION 2.- $P\{$il existe n tel que $Y_n \geq aV_n\} \leq q_a(y-av)$. $(a>0)$
Si $y=0, v=0$ , $P\{$il existe n tel que $Y_n \geq aV_n+b\} \leq \frac{1}{1+ab}$ $(a>0, b\geq 0)$

DÉMONSTRATION.- 1) $(Y_n \geq aV_n) \Leftrightarrow (Z_n \geq 0) \Leftrightarrow (q_a(Z_n)=1)$ avec les notations de la prop.1. D'après l'inégalité de DOOB, $P\{\sup_n q_a(Z_n) \geq 1\} \leq E[q_a(Z_0)] = q_a(y-av)$.

Appliquons ce résultat avec les notations suivantes : prenons $y=0$, $v=0$, posons $V'_n = \frac{b}{a} + V_n$ ; alors

$$P\{\text{il existe n tel que } Y_n \geq aV'_n\} \leq q_a(-b) = \frac{1}{1+ab}$$

d'où aussitôt la relation de la seconde ligne de l'énoncé.

REMARQUES.- i) Si $y=0, v=0$, $P\{$il existe n tel que $|Y_n| \geq aV_n+b\} \leq 2/(1+ab)$
ii) La borne en $1/(1+ab)$ ci-dessus ne peut être améliorée.

Voici le résultat principal de la première partie de l'exposé : on notera qu'il **entraîne** les conséquences suivantes : soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle, de carré intégrable. Alors si $\sum_n \sigma_n^2 < +\infty$, $\sum_n X_n$ est p.s. convergente ; si $\sum_n \sigma_n^2 = +\infty$, alors $\sum_1^k X_n / \sum_1^k \sigma_n^2 \to 0$ p.s. lorsque $k \to +\infty$ ( loi forte des grands nombres dans le cas des variances finies).

THÉORÈME 1.- <u>Quels que soient</u> y <u>et</u> v, <u>le rapport</u> $\frac{Y_n}{V_n}$ <u>converge p.s. vers une limite finie, p.s. nulle sur</u> $\{V_\infty = +\infty\}$.

DÉMONSTRATION.- Soit $K \in \underline{N}$ , **et soit** $T = \inf\{n : V_{n+1} > K\}$ ; comme $V_{n+1}$ est $\underline{\underline{F}}_n$-mesurable pour tout n, T est un temps d'arrêt .

D'après le théorème d'arrêt de DOOB, nous avons $E[Y_S^2] = E[V_S] + y^2 - v$ pour tout temps d'arrêt borné S ; en appliquant cela à $S = T \wedge n$, nous voyons que la martingale $Y^T$ obtenue par arrêt de Y à T est bornée dans $L^2$, et converge donc p.s. vers une limite finie. Comme $\{V_\infty < \infty\}$ est la réunion des ensembles $\{T=\infty\}$ pour $K \in \underline{N}$, on voit que $Y_n$ converge p.s. sur $\{V_\infty < \infty\}$, d'où le même résultat pour $Y_n/V_n$.

Plaçons nous maintenant sur $\{V_\infty = \infty\}$, et montrons que $Y_n/V_n \to 0$ p.s.. On peut évidemment supposer $y=0, v=0$. Tout revient à montrer que pour tout $a>0$ l'ensemble $\{V_\infty = \infty, \limsup_n \frac{|Y_n|}{V_n} \geq 2a\}$ est négligeable ; or cet ensemble est contenu, pour tout $b>0$, dans $\{$ il existe $n$ tel que $|Y_n| \geq aV_n+b\}$, dont la probabilité est au plus $2/(1+ab)$. Il est donc bien négligeable, et le théorème est établi.

Passons maintenant au théorème de BOREL-CANTELLI. Soit $(A_n)$ un processus croissant ( avec $A_0=0$ comme d'habitude) et soit $(\tilde{A}_n)$ son compensateur :

$$\tilde{A}_0=0 \qquad \tilde{A}_n= E[A_1|\underline{\underline{F}}_0]+\ldots+E[A_n-A_{n-1}|\underline{\underline{F}}_{n-1}]$$

LEVY a démontré que $A_\infty$ est fini p.s. sur l'ensemble $\{\tilde{A}_\infty<\infty\}$, et que si les différences $\Delta A_i$ sont majorées par une même constante, ou plus généralement par une même fonction intégrable, les deux ensembles $\{A_\infty=\infty\}$ et $\{\tilde{A}_\infty=\infty\}$ sont p.s. égaux. Ce résultat contient, lorsque les $\Delta A_i$ sont des <u>indicatrices</u> d'événements indépendants, le théorème de BOREL-CANTELLI usuel. Nous allons appliquer à cette situation le théorème de DUBINS et FREEDMAN, ce qui nous donnera en particulier le résultat bien plus précis suivant :

PROPOSITION 3.- <u>Si les</u> $\Delta A_i$ <u>sont des indicatrices</u>, $\frac{A_n}{\tilde{A}_n}\to 1$ <u>p.s. sur</u> $\{\tilde{A}_\infty=\infty\}$

Supposons que les variables aléatoires $\Delta A_i$ appartiennent à $L^2$. Le processus $(A_n-\tilde{A}_n)$ est alors une martingale de carré intégrable $(Y_n)$, et il est facile de construire le processus $(V_n)$ correspondant . Le th.1 donne alors le résultat suivant :

<u>Le rapport</u>

$$\frac{A_n - \tilde{A}_n}{\Sigma_0^n(E[\Delta A_p^2|\underline{\underline{F}}_{p-1}]-\Delta\tilde{A}_p^2)}$$

<u>converge p.s. vers une limite finie</u>. <u>Cette limite vaut</u> 0 <u>sur l'ensemble où le dénominateur</u> $\to+\infty$ .

Maintenant, notons $d_n$ le dénominateur, et posons $d'_n = \Sigma_0^n E[\Delta A_p^2|\underline{\underline{F}}_{p-1}]$. Je dis qu'on a le résultat suivant ( qui entraîne aussitôt la proposition 3 , car si l'on a affaire à des indicatrices on a $d'_n=\tilde{A}_n$) :

<u>Le rapport</u> $\displaystyle\frac{A_n - \tilde{A}_n}{\Sigma_0^n E[\Delta A_p^2|\underline{\underline{F}}_{p-1}]} = \frac{A_n-\tilde{A}_n}{d'_n}$ <u>converge p.s. vers une limite finie, nulle sur</u> $\{\Sigma_0^\infty E[\Delta A_p^2|\underline{\underline{F}}_{p-1}]=+\infty\}$.

En effet :

1) sur $\{d'_\infty<\infty\}$, on a $d_\infty \leq d'_\infty < \infty$ , donc $A_n-\tilde{A}_n$ a une limite finie d'après DUBINS et FREEDMAN ci-dessus, d'où le résultat.

2) Le même raisonnement s'applique sur $\{d_\infty<\infty , d'_\infty=\infty\}$, et il apparaît que la limite du rapport est 0 dans ce cas.

3) Sur $\{d_\infty=\infty\}$, nous savons d'après DUBINS-FREEDMAN que $\frac{A_n-\tilde{A}_n}{d_n}\to 0$ , d'où le même résultat a fortiori en remplaçant $d_n$ par $d'_n \geq d_n$.

BORNES EN MOYENNE QUADRATIQUE POUR $Y_n/V_n$

Il s'agit encore ici d'une majoration très ingénieuse ( mais il n'est pas certain qu'elle soit très utile ! )

THÉORÈME 2.- Avec les notations du début, le processus $\frac{Y_n^2}{V_n^2} + \frac{1}{V_n}$ est une surmartingale.

COROLLAIRE.- Pour tout temps d'arrêt T, $E[\frac{Y_T^2}{V_T^2}] \leq \frac{y^2}{v^2} + \frac{1}{v}$ .

DÉMONSTRATION.- Comme dans la preuve du théorème 1, notons $\theta_n(\omega,dy)$ la répartition conditionnelle de $\Delta Y_n$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_{n-1}$, dont la moyenne est nulle et la variance est $\Delta V_n$. Posons $k(y,v)=\frac{y^2}{v^2}+\frac{1}{v}$ . On a

$$E[k(Y_n,V_n)|\underline{\underline{F}}_{n-1}] = \int k(Y_{n-1}+y,V_n)\theta_n(.,dy) = \frac{1}{V_n^2}\int (Y_{n-1}+y)^2\theta_n(.,dy)+\frac{1}{V_n}$$

$$= \frac{1}{V_n^2}( Y_{n-1}^2+\Delta V_n) + \frac{1}{V_n}$$

$$= \frac{Y_{n-1}^2+\Delta V_n}{(V_{n-1}+\Delta V_n)^2} + \frac{1}{(V_{n-1}+\Delta V_n)}$$

Mais la fonction $\frac{a+x}{(b+x)^2}+\frac{1}{b+x}$ est décroissante pour $x\geq 0$, quels que soient a et b positifs. Ce dernier terme est donc majoré par

$$\frac{Y_{n-1}^2}{V_{n-1}^2} + \frac{1}{V_{n-1}} = k(Y_{n-1},V_{n-1})$$

et le théorème est établi.

## § 2 . MARTINGALES A SAUTS BORNÉS, BORNES EXPONENTIELLES

Nous allons aborder ici des problèmes assez différents , par une méthode qui n'est pas celle de DUBINS et FREEDMAN ( mais qui conduit aux mêmes résultats ! ).

La méthode peut se rattacher à l'idée suivante ( qui a aussi été utilisée par MAISONNEUVE pour l'étude des martingales continues ). Soit $(Y_n)$ une martingale, que nous supposerons d'abord bornée . Posons

$$M_n = \frac{e^{\lambda Y_n}}{\prod_1^n E[e^{\lambda \Delta Y_k} | \underline{\underline{F}}_{k-1}]} \qquad (M_0 = e^{\lambda Y_0} \text{ par convention })$$

où $\lambda$ est réel ; alors $(M_n)$ est une martingale positive. Si $(Y_n)$ n'est pas bornée, mais si on suppose seulement que les variables aléatoires $\Delta Y_k$ ( y compris $\Delta Y_0 = Y_0$ ) sont bornées supérieurement par une constante positive C, un passage à la limite simple à partir du cas borné montre que $(M_n)$ est une <u>surmartingale</u> positive, pour $\lambda > 0$.

Or on a $E[\lambda \Delta Y_k | \underline{\underline{F}}_{k-1}] = 0$. Le dénominateur s'écrit donc aussi $\prod_1^n (1 + E[\mathcal{E}(\lambda \Delta Y_k) | \underline{\underline{F}}_{k-1}])$, en posant $\mathcal{E}(t) = e^t - 1 - t$ . Comme $\mathcal{E}(t)$ se comporte comme $t^2$ pour t petit, on voit apparaître la variance conditionnelle $\Delta V_n$.

En fait, nous ne procèderons pas exactement de cette façon. Voici d'abord quelques inégalités élémentaires sur la fonction $\mathcal{E}$. D'après la formule $\frac{f(u)-f(0)-uf'(0)}{g(u)-g(0)-ug'(0)} = \frac{f''(\theta u)}{g''(\theta u)}$ $(0<\theta<1)$ appliquée à $f(u)=e^{xu}$, $g(u)=e^{yu}$, il vient

$$\frac{\mathcal{E}(ux)}{\mathcal{E}(uy)} = \frac{x^2}{y^2} \exp[\theta u(x-y)] \quad \text{donc si } x \leq y \quad \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{E}(y)} \leq \frac{x^2}{y^2}$$

En particulier, si y est positif et $-\infty \leq t \leq 1$ , on a $\mathcal{E}(ty) \leq t^2 \mathcal{E}(y)$. Noter que la fonction $\mathcal{E}$ est toujours positive.

LEMME.- <u>Soit</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>une sous-tribu de</u> $\underline{\underline{F}}$, <u>et soit</u> Z <u>une variable aléatoire de carré intégrable telle que</u>

$$Z \leq C \text{ , \underline{constante positive}}$$
$$E[Z|\underline{\underline{G}}]=0$$

<u>On pose</u> $E[Z^2|\underline{\underline{G}}]=W$. <u>Soit</u> $\Lambda$ <u>une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{G}}$<u>-mesurable</u> $\geq 0$. <u>Alors</u>

$$E[\exp( \Lambda Z - \frac{\mathcal{E}(\Lambda C)}{C^2} W) \mid \underline{\underline{G}} ] \leq 1.$$

DEMONSTRATION.- D'après le lemme de Fatou, il suffit de démontrer le lemme lorsque $\Lambda$ est bornée, puis lorsque Z est bornée. Nous ferons donc ces hypothèses dans la suite de la démonstration. La relation suivante ne pose dans ce cas aucune difficulté d'intégrabilité :

$$E\left[\frac{e^{\Lambda Z}}{E[e^{\Lambda Z}|\underline{\underline{G}}]}\Big|\underline{\underline{G}}\right] = 1$$

Le dénominateur s'écrit aussi $1+E[\mathcal{E}(\Lambda Z)|\underline{\underline{G}}]$ ; nous écrirons $\Lambda Z$ sous la forme $\frac{Z}{C}\cdot\Lambda C$ , de sorte que cette expression est majorée ( comme $Z/C \leq 1$) par

$$1+E[\frac{Z^2}{C^2}\mathcal{E}(\Lambda C)|\underline{\underline{G}}] = 1+\frac{\mathcal{E}(\Lambda C)}{C^2}W \leq \exp(\frac{\mathcal{E}(\Lambda C)}{C^2}W)$$

Le lemme s'en déduit aussitôt.

PROPOSITION 4. Soit $(Y_n)$ une martingale de carré intégrable, telle que $Y_0=y$, et que $\Delta Y_k \leq C$ pour $k>0$. Alors le processus

$$M_n = \exp[\lambda Y_n - \frac{\mathcal{E}(\lambda C)}{C^2}V_n]$$

est une surmartingale, pour tout $\lambda \geq 0$.

DEMONSTRATION.- On a $M_{n+1} = M_n \exp(\lambda\Delta Y_n - \frac{\mathcal{E}(\lambda C)}{C^2}\Delta V_n)$ , et on applique le lemme avec $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}_{n-1}$ , $Z=\Delta Y_n$ .

DUBINS et FREEDMAN en déduisent la conséquence suivante : si $V_\infty$ est majorée par une constante b , on a pour tout temps d'arrêt T

$$E[\exp(\lambda Y_T)] \leq \exp(\lambda y + b\frac{\mathcal{E}(\lambda C)}{C^2})$$

Cette inégalité ne peut être améliorée ( si on n'avait pas $Y_0=y$, l'inégalité vaudrait sous forme conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_0$ ).

DUBINS et FREEDMAN démontrent encore un autre résultat curieux : si l'on a non seulement $\Delta Y_n \leq C$, mais $|\Delta Y_n| \leq C$, on a une autre surmartingale faisant intervenir un Ch. Nous prenons C=1 pour fixer les idées : le processus $\mathrm{Ch}(\lambda\frac{Y_n}{V_n})\exp(V_n\mathcal{E}(\frac{\lambda}{V_n}))$ est alors une surmartingale.

UNE PETITE LOI LOGARITHMIQUE

Les majorations de DUBINS et FREEDMAN s'appliquent en particulier à des sommes de variables indépendantes centrées de carré intégrable, pour lesquelles on a des résultats beaucoup plus précis que la loi des grands nombres. Nous allons établir ici une petite loi logarithmique, beaucoup plus faible que la loi du logarithme itéré habituelle, et valable seulement pour les martingales à sauts bornés supérieurement. Il ne s'agit donc pas d'un résultat très intéressant ! Pour fixer les idées, nous prendrons des martingales à sauts bornés par 1.

PROPOSITION 5.- Soit $(Y_n)$ une martingale de carré intégrable, telle que $Y_0 = y$, et que $\Delta Y_n \leq 1$ pour tout $n>0$. Soit $\rho$ une fonction croissante sur $\underline{R}_+$, $>0$, tendant vers $+\infty$ et telle que la série $\Sigma \frac{\Delta V_n}{(\rho(V_n))^2}$ converge p.s.. On a alors p.s.

$$\sup_n \frac{Y_n}{\rho(V_n)} < \infty$$

Par exemple, on peut prendre $\rho(t)=\sqrt{t \log t\,(\log\log t)^{\alpha}}$ avec $\alpha>1$. On est loin de la précision de la loi du logarithme itéré.

DEMONSTRATION.- Nous avons, en supposant d'abord $\rho(t)\geq\varepsilon>0$

$$E[\exp \frac{Y_n}{\rho(V_n)} | \underline{F}_{n-1}] = E[\exp \frac{Y_{n-1}}{\rho(V_n)} \exp \frac{\Delta Y_n}{\rho(V_n)} | \underline{F}_{n-1}]$$

nous majorons le second membre en remplaçant $V_n$ par $V_{n-1}$ sous le premier symbole exp ; comme $Y_{n-1}$ est $\underline{F}_{n-1}$-mesurable, l'exponentielle sort de l'espérance conditionnelle. Nous écrirons donc

$$E[\exp \frac{Y_n}{\rho(V_n)} | \underline{F}_{n-1}] \leq \exp (\frac{Y_{n-1}}{\rho(V_{n-1})})( 1 + E[\mathcal{E}( \frac{\Delta Y_n}{\rho(V_n)})|\underline{F}_{n-1}] )$$

Mais $\mathcal{E}(\dots) \leq \Delta Y_n^2\, \mathcal{E}( \frac{1}{\rho(V_n)})$, d'où aussitôt

$$E[\exp \frac{Y_n}{\rho(V_n)} | \underline{F}_{n-1}] \leq \exp \frac{Y_{n-1}}{\rho(V_{n-1})} ( 1+ \Delta V_n\, \mathcal{E}( \frac{1}{\rho(V_n)}) )$$

Par conséquent, le processus

$$M_n = \frac{\exp (Y_n/\rho(V_n))}{\prod_1^n (1+ \Delta V_n\, \mathcal{E}( \frac{1}{\rho(V_n)}))}$$

est une surmartingale positive, donc $\sup_n M_n$ est p.s. une variable aléatoire finie. Donc $\sup Y_n/\rho(V_n)$ est p.s. fini sur l'ensemble où le produit infini du dénominateur est convergent. Il ne reste plus qu'à noter que si $V_\infty<\infty$, alors $Y_n/V_n$ converge p.s. ( th.1) , donc $\sup_n Y_n/\rho(V_n)$ est fini, et si $V_\infty = \infty$, $\mathcal{E}(1/\rho(V_n))$ est équivalent à $1/\rho^2(V_n)$ lorsque $n\to\infty$.

On se débarrasse enfin de l'hypothèse $\rho\geq\varepsilon >0$ de la manière suivante : sur $\{V_\infty<\infty\}$, l'énoncé est trivial ( comme ci-dessus) ; sur $\{V_\infty=\infty\}$, on applique le résultat précédent à $\rho+h$, $h>0$, ce qui donne un résultat équivalent au résultat cherché.