SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO

Théorème de Stone et espérances conditionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 132

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__132_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968-69

THÉORÈME DE STONE ET ESPÉRANCES CONDITIONNELLES

par J. de SAM LAZARO (*)

La remarque suivante est certainement bien connue, mais elle est amusante.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé , et soit (θ_t) un flot sur cet espace - i.e. un groupe de transformations ponctuelles conservant la mesure. Comme d'habitude, nous notons (T_t) le groupe d'opérateurs unitaires sur $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ associé au flot, que nous supposons fortement continu ; ainsi, si $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, nous avons $T_t f = f\circ\theta_t$.

D'après le théorème spectral de STONE, ce groupe admet une représentation de la forme

$$T_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dE_u$$

où les projecteurs E_u sont tels que $E_u E_v = E_{u\wedge v}$. Il est naturel de se demander si les projecteurs E_u peuvent être des opérateurs d'espérance conditionnelle. Nous allons voir que c'est impossible.

En effet, supposons qu'il en soit ainsi ; alors $E_u f$ est réelle si f est réelle et nous avons donc, si f et g sont réelles

$$< T_t f, g > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d_u <E_u f, g >$$

Le premier membre étant un nombre réel, passons aux conjugués ; comme $<E_u f, g>$ est réelle

$$< T_t f,\ g > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}\ d_u < E_u f, g > = < T_{-t} f, g >$$

Donc $T_t = T_{-t}$, et $T_{2t} = I$; comme t est arbitraire, le flot est trivial.

(*) Rédaction par P.Meyer d'une lettre de J.Lazaro.