XAVIER FERNIQUE

Séries de distributions aléatoires indépendantes (exposé 2)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 65-71
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__65_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités   Février 1967

SÉRIES DE DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

(par X. Fernique)

Exposé 2

Le but de cet exposé est la démonstration des deux théorèmes suivants qui généralisent mot pour mot des théorèmes classiques sur les séries de variables aléatoires numériques indépendantes :

Théorème 1 : *Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes telle que $\prod_n L_{X_n}$ converge simplement vers une limite continue ; alors la série $\sum_n X_n$ converge presque sûrement.*

Théorème 2 : *Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes telle que $\prod_n |L_{X_n}|$ converge simplement vers une limite continue ; il existe alors une suite (x_n) de distributions telle que la série $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement.*

§ 1 - LEMMES PRELIMINAIRES -

Lemme 1 : Soit f une fonction de type positif continue sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 à l'origine ; dans ces conditions, on a pour tout nombre positif a

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 - \operatorname{Re} f(x) \leq 3\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{a}\int_0^a (1 - \operatorname{Re} f(t))\, dt$$

Démonstration : On démontre d'abord l'inégalité quand $f(x) = \exp(ivx)$ par des calculs bêtes ; on en déduit le cas général en intégrant par rapport à une mesure de probabilité $\mu(dv)$.

Lemme 2 : Soient f , f_n des fonctions de type positif , réelles et positives, continues sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 à l'origine telles que $f = \prod_n f_n$; on suppose donnés deux nombres $c \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$ et $d > 0$ tels que pour tout nombre réel x , on ait :

(2) $$1 - f(x) \leqslant c\,(1 + d\,x^2)\,;$$

dans ces conditions, pour tout nombre réel x, on a aussi

(3) $$\sum_n (\,1 - f_n(x)) \leq 12c(\,1 + dx^2\,)\,.$$

Démonstration : Les hypothèses $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ et $f = \prod_n f_n$ montrent que pour tout nombre réel t, on a :

$$\sum_n (1 - f_n(t)) \leqslant \ln \frac{1}{f(t)} \quad ;$$

en utilisant le lemme 1 appliqué aux fonctions f_n avec $a = \frac{1}{\sqrt{d}}$, on obtient :

$$\sum_n (1 - f_n(x)) \leqslant k\,(1 + d\,x^2)\,\sqrt{d}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{d}}} \ln \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

L'hypothèse (2) montre que sur l'intervalle d'intégration, $\ln \frac{1}{f(t)}$ est majoré par $\ln \frac{1}{1 - 2c}$ donc par $(3 \ln 3)\,c$ puisque c est inférieur à $\frac{1}{3}$; on en déduit le résultat.

Corollaire : Soient L , L_n des fonctions de type positif réelles et positives, continues sur $\mathfrak{D}$ prenant la valeur 1 à l'origine telles que $L = \prod_n L_n$; pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe alors une f. q. Q sur $\mathfrak{D}$ telle que :

(4) $$\forall \varphi \in \mathfrak{D},\ \sum_n (1 - L_n(\varphi)) \leqslant \varepsilon\,(1 + Q(\varphi, \varphi)).$$

Démonstration : On peut supposer $\varepsilon < 4$ de sorte que $\frac{\varepsilon}{12}$ soit inférieur à $\frac{1}{3}$. Il existe alors (exposé 1, (1a)) une f.q. Q sur $\mathcal{D}$ telle que :

$$Q(\varphi,\varphi) \leqslant \frac{12}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad 1 - L(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \ ;$$

On a alors :

$$1 - L(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \left(1 + Q(\varphi,\varphi) \right) .$$

C'est en effet évident si $Q(\varphi,\varphi)$ est inférieur ou égal à $\frac{12}{\varepsilon}$, et dans l'autre cas le second membre est supérieur ou égal à 1, lui-même supérieur ou égal au premier.

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, les fonctions $L(x\varphi)$, $L_n(x\varphi)$ vérifient alors les hypothèses du lemme 2 avec $c = \frac{\varepsilon}{12}$ et $d = Q(\varphi,\varphi)$; on en déduit le résultat.

Lemme 3 : (Symétrisation des distributions aléatoires) : Soient Q et $\mathbb{R}$ deux f. q. sur $\mathcal{D}$, Q étant subordonnée à $\mathbb{R}$; pour toute distribution aléatoire X, il existe une distribution x telle que :

$$\text{(5)} \qquad \forall h \geqslant 0 \, , \ \mathbb{P}\left\{ X - x \notin h\, K_R \right\} \leqslant 2\, \mathbb{P}\left\{ X^s \notin h\, K_Q \right\}$$

(les notations sont celles de l'exposé 1).

Démonstration : Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ dont l'image dans $\hat{E}_R$ soit orthonormale et totale ; pour tout entier $n > 0$, les inégalités classiques de symétrisation ([1] p. 147) montrent qu'on a :

$$\forall h \geqslant 0, \ \mathbb{P}\left\{ \exists\, m \leqslant n \mid [\langle X, \varphi_m\rangle - \mu(\langle X, \varphi_m\rangle)]^2 > h^2\, Q(\varphi_m, \varphi_m) \right\}$$
$$\leqslant 2\, \mathbb{P}\left\{ \exists\, m \leqslant n \mid \langle X^s, \varphi_m\rangle^2 > h^2\, Q(\varphi_m, \varphi_m) \right\}.$$

On en déduit :

$$\forall h \geqslant 0, \mathbb{P}\left\{ \exists\, n \in \mathbb{N} \mid [\langle X, \varphi_n\rangle - \mu(\langle X, \varphi_n \rangle)]^2 > h^2\, Q(\varphi_n, \varphi_n) \right\}$$

(6)
$$\leqslant 2\ P\left\{ \exists\, \varphi \in \mathcal{D} \mid \langle X^s, \varphi\rangle^2 > h^2\, Q(\varphi, \varphi) \right\}$$

Nous distinguons maintenant deux cas :

a) si pour tout nombre $h \geqslant 0$, le second membre de (5) est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, l'inégalité (5) est trivialement vérifiée pour tout élément x de $\mathcal{D}'$.

b) Dans le cas contraire, il existe un nombre $h_o \geqslant 0$ tel que le second membre de (6) soit strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, l'inégalité (6) montre alors un sous-ensemble Ω_o de l'espace d'épreuves de probabilité non nulle, donc non vide, dans lequel on a :

$$\forall n \in \mathcal{N}\ , [\langle X, \varphi_n\rangle - \mu(\langle X, \varphi_n\rangle)]^2 \leqslant h_o^2\ Q(\varphi_n, \varphi_n)\ ;$$

soit ω_o un élément de Ω_o, on pose $X_o = X(\omega_o)$; soit Y_o l'élément de $\mathcal{D}'$ défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle Y_o, \varphi\rangle = \sum_n \left[\langle X_o, \varphi_n\rangle - \mu(\langle X, \varphi_n\rangle)\right]\ R(\varphi, \varphi_n)$$

on aura alors, pour tout entier n :

$$\langle X_o - Y_o, \varphi_n\rangle = \mu(\langle X, \varphi_n\rangle)\ ;$$

On pose alors $x = X_o - Y_o$; en substituant dans (6), utilisant la subordination de Q , on obtient :

$$\forall h \geqslant 0,\ \mathbb{P}\left\{ \sum_n [\langle X - x, \varphi_n\rangle]^2 > h^2 \right\} \leqslant 2\, \mathbb{P}\left\{ X^s \notin h\, K_Q \right\}\ ;$$

on en déduit immédiatement le résultat.

§ 2 - LES THEOREMES DE CONVERGENCE -

Les différents modes de convergence des distributions aléatoires ont été étudiées dans [2] : on y trouvera les définitions et propriétés des convergences étroites des lois, des convergences en loi, des convergences presque sûres des distributions aléatoires. Rien de tout cela n'est utile ici ; il suffit de définir la convergence presque sûre d'une suite de distributions aléatoires :

Définition : On dit qu'une suite (X_n) de distributions aléatoires ayant même espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ converge presque sûrement si l'ensemble $\{\omega \mid (X_n(\omega))$ ne converge pas$\}$ est un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité nulle.

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons la notation suivante : étant donnés une f. q. Q sur $\mathcal{D}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, nous dirons qu'une suite (X_n) de idistributions aléatoires possède la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ si on a :

$$\sum_n \mathbb{E}\left\{\inf\left[1, \bar{Q}(X_n, X_n)\right]\right\} \leq \varepsilon .$$

Lemme de convergence : Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes possédant une propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$; il existe alors une suite (x_n) de distributions telle que la série $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement.

Démonstration : L'inégalité classique de Kolmogorov généralisée aux expaces de Hilbert montre que pour toute famille (V_k) de variables aléatoires centrées indépendantes à valeurs dans un espace de Hilbert séparable et tout nombre $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left\{\sup_k \left\|\sum_{j=1}^{k} V_j\right\| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_k \mathbb{E}\left\{\|V_k\|^2\right\} . \tag{7}$$

Sous les hypothèses du lemme, on considère la suite (Y_n) des distributions aléatoires tronquées par K_Q, définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } X_n(\omega) \text{ appartient à } K_Q , \\ 0 & \text{dans le contraire.} \end{cases}$$

Le lemme de Borel-Cantelli et la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ montrent qu'il suffit pour conclure de construire une suite (x_n) de distributions telle que $\sum_n (Y_n - x_n)$ converge presque sûrement. On pose pour cela :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n = \mathbb{E}(Y_n).$$

L'inégalité (7) et la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ montrent en effet que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^{p} (Y_n - x_n) \right)$ est presque sûrement une suite de Cauchy dans $\hat{E}_Q$; elle converge presque sûrement dans $\mathcal{D}'$; d'où le résultat.

Démonstration du Théorème 2 : Pour tout entier n, on pose $L_n = |L_{X_n}|^2 = L_{X_n^s}$ et on note π_n la loi de X_n^s ; on pose aussi $L = \prod_n L_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le corollaire du lemme 2 montre qu'il existe une f. q. Q sur $\mathcal{D}$ telle que la relation (4) soit vérifiée. Le corollaire du lemme de Minlos (exposé 1) appliqué aux sommes partielles de la série de terme général π_n montre que pour toute f. q. R sur $\mathcal{D}$ à laquelle Q soit subordonnée, on a :

$$\sum_n \int_{K_R} \bar{R}(x,x) \, d\pi_n(x) + \sum_n \pi_n \left\{ \mathcal{D}' - K_R \right\} \leqslant 6\,\varepsilon \; ;$$

ceci signifie que la suite (X_n^s) possède la propriété $\mathcal{P}(R, 6\,\varepsilon)$. Soit alors S une f. q. sur $\mathcal{D}$ à laquelle R soit subordonnée ; le lemme 3 montre qu'il existe une suite (x'_n) de distributions telles que, pour tout entier n, on ait :

$$\forall t \geqslant 0, \; \mathbb{P}\left\{ \bar{S}(X_n - x'_n, X_n - x'_n) \geqslant t \right\} \leqslant 2\,\mathbb{P}\left\{ \bar{R}(X_n^s, X_n^s) \geqslant t \right\} ;$$

dans ces conditions, on a :

$$\mathbb{E}\left\{ \inf \left[\bar{S}(X_n - x'_n, X_n - x'_n), 1 \right] \right\} \leqslant 2\,\mathbb{E}\left\{ \inf \left[\bar{R}(X_n^s, X_n^s), 1 \right] \right\}.$$

Il en résulte que la suite $(X_n - x'_n)$ possède la propriété $\mathcal{P}(S, 12\,\varepsilon)$. Le lemme de convergence donne alors immédiatement le résultat.

Démonstration du théorème 1 : Le théorème 2 montre qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{D}'$ telle que $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement ; en particulier pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, le produit

$$\prod_n \left[L_{X_n} (\varphi) \exp (- i \langle x_n , \varphi) \right.$$

converge vers une limite fonction continue de φ. En comparant avec l'hypothèse du théorème, on en déduit que $\sum_n x_n$ converge dans $\mathcal{D}'$; par différence, on en déduit le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

(On trouvera une liste de références à la fin du premier exposé).

[1] M. LOÈVE Probability theory, N. York, Van Nostrand, 1960.

[2] X. FERNIQUE Processus linéaires, processus généralisés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, à paraître.

--oo0oo--