SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE COURRÈGE

Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions höldériennes et noyaux de convolution régularisants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 34-51

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__34_0>

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département de Mathématique

Novembre 1966

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS

=:=:=:=:=:=

Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions Höldériennes et Noyaux de convolution régularisants

par Philippe COURRÈGE

SOMMAIRE :

- L'opérateur de convolution associé en valeur principale à un noyau de Caldéron - Zygmund homogène de classe $C^{o,\mu}$ sur la sphère unité applique continûment $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ si $0 < \lambda < \mu \leq 1$ (Théorème I, n° 3.2. et Théorème II , n° 3.3).

- Formule de dérivation sous le signe somme pour l'opérateur de convolution associé à un noyau homogène de degré $1 - n$ (Théorème III , n° 4.2) .

- Application : L'opérateur de convolution associé à un noyau homogène de degré $m - n$ et de classe $C^{m,\mu}$ sur la sphère unité applique $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda}(R^n)$ si $0 < \lambda < \mu \leq 1$ (Théorème IV , n° 4.3) . Cas particulier du potentiel Newtonien (n° 4.4) .

§ 1 - Notations ; espaces de fonctions Hölderiennes.

1.1.- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par $C^p(\Omega)$ (p entier ≥ 0, Ω ouvert de R^n) l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur Ω et ayant des dérivées jusqu'à l'ordre p continues, et par $C^p_k(\Omega)$ (resp. $C^p_K(\Omega)$) le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions de $C^p(\Omega)$ à support compact (resp. à support contenu dans le compact K). On pose $C(\Omega) = C^o(\Omega)$, $C_k(\Omega) = C^o_k(\Omega)$ et $C^\infty_k(\Omega) = \bigcap\limits_p C^p_k(\Omega)$.

On pose en outre,

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \qquad [1 \leq i \leq n \ , \ f \in C^1(\Omega)]$$

$$D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} \quad [\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_n) \in N^n, |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, f \in C^{|\beta|}(\Omega)] .$$

1.2.- Normes et espaces de fonctions Hölderiennes. Si $0 < \lambda \leq 1$, on pose,

$$[f]_{0,\lambda} = \sup_{\substack{x' \in R^n, x'' \in R^n \\ x' \neq x''}} \frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|^\lambda} \qquad (f \in C(R^n))$$

$$[f]_{p,\lambda} = \sum_{|\beta| = p} [D^\beta f]_{0,\lambda} \qquad (f \in C^p(R^n), p \text{ entier} \geq 0) .$$

On désigne par $C^{p,\lambda}(R^n)$ le sous-espace de $C^p(R^n)$ formé des fonctions $f \in C^p(R^n)$ ayant toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre p bornées et telles que $[f]_{p,\lambda} < +\infty$.

Pour $f \in C^{p,\lambda}(R^n)$, on pose

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq p} \|D^\beta f\| + [f]_{p,\lambda} \qquad (^1)$$

---

(1) Si $f \in C(R^n)$ est bornée, on pose $\|f\| = \sup\limits_{x \in R^n} |f(x)|$.

On désigne par $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ (resp. $C_K^{p,\lambda}(R^n)$) le sous-espace de $C^{p,\lambda}(R^n)$ formé des fonctions à support compact (resp. à support compact contenu dans le compact K) , et par $C_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$ (Ω ouvert de R^n) le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions f telles que $\varphi f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$ pour tout $\varphi \in C_k^{\infty}(\Omega)$.

On a alors, en vertu de la formule de Taylor ,

(1.1) $$C^{p+1}(\Omega) \subset C_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$$

(p entier ≥ 0, $0 < \lambda \leq 1$)

(1.2) $$C_k^{p+1}(R^n) \subset C_k^{p,\lambda}(R^n) \subset C_k^p(R^n) \ .$$

Les espaces $C^{p,\lambda}(R^n)$ et $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ seront toujours munis de la topologie associée à la norme $\| \ \|_{p,\lambda}$ qui en fait des espaces de Banach .

1.3. - On note Σ_n la sphère unité de R^n ($\Sigma_n = \{z \mid z \in R^n$ et $|z| = 1\}$) et σ_n la mesure Riemanienne sur Σ_n associée à la métrique Riemanienne induite par la métrique euclidienne sur R^n ("mesure superficielle") . Posant $\omega_n = \sigma_n(\Sigma_n)$, on rappelle que ,

$$\tau_n = \int_{|y| \leq 1} dy = \frac{\omega_n}{n} \quad \text{(en particulier } \omega_1 = 2)$$

On rappelle en outre la formule de désintégration de la mesure de Lebesgue sur R^n en coordonnées polaires,

(1.3) $$\int_{R^n} f(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}\, d\rho \int_{\Sigma_n} f(\rho\theta)\,\sigma_n(d\theta) \qquad (f \in C_k(R^n)) \ .$$

§ 2 - Opérateur de convolution associé à un noyau singulier .

2.1. - Un noyau singulier (sur R^n) sera ici une fonction $k \in C(R^n \backslash \{0\})$ positivement homogène de degré $-n$:

(2.1) $$k(tz) = t^{-n} k(z) \qquad (z \in R^n \setminus \{0\}, t > 0) \quad .$$

Pour un tel noyau, on pose, pour $\epsilon > 0$,

(2.2) $$k_\epsilon(z) = 1_{R^n \backslash B_\epsilon(0)}(z)\ k(z) \qquad (z \in R^n)$$ [2] ; ou encore ,

$$k_\epsilon(z) = k(z) \text{ si } |z| \geq \epsilon \text{ et } k_\epsilon(z) = 0 \text{ si } |z| < \epsilon \quad .$$

Alors $k_\epsilon \in \mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$, et définit un opérateur de convolution $f \to k_\epsilon * f$ appliquant $C_k(R^n)$ dans $C(R^n)$. On va étudier

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} k_\epsilon * f(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \epsilon} k(z) f(x-z) dz \ .$$

PROPOSITION . - Soient k un noyau singulier, et $0 < \lambda \leq 1$.

(1) Si $\lim_{\epsilon \downarrow 0} k_\epsilon * f(x)$ existe pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $x \in R^n$, alors ,

(2.3) $$\int_{\Sigma_n} k(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = 0 \quad .$$

(2) Inversement, si (2.3) est satisfaite, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} k_\epsilon * f(x)$ existe pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $x \in R^n$, la convergence ayant lieu uniformément en $x \in R^n$.

---

(1) $B_\epsilon(x) = \{z \mid z \in R^n \text{ et } |z-x| < \epsilon\}$; si $W \subset R^n$, $1_W(z) = 1$ si $z \in W$ et $1_W(z) = 0$ si $z \notin W$.

En effet, R étant un nombre > 0 , on a, pour $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $\epsilon < R$,

$$\int_{|z|\geq\epsilon} k(z)\, f(x-z)dz = \int_{R>|z|\geq\epsilon} k(z)[f(x-z)-f(x)]\, dz + \int_{|z|\geq R} k(z)f(x-z)dz + f(x)\log\frac{R}{\epsilon}\int_{\Sigma_n} k(\theta)\sigma_n(d\theta),$$

ainsi qu'il résulte de (1.3) et de l'homogénéité (2.1) de k .

On conclut alors en remarquant d'une part que la fonction $z \longrightarrow 1_{B_R(0)}(z)\, k(z)[f(x-z) - f(x)]$ est sommable dans R^n puisque ,

(2.4) $$|k(z)\,[f(x-z)-f(x)]\,| \leq \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)|\,.\,[f]_{o,\lambda}\, |z|^{\lambda-n} \quad ;$$

et d'autre part que, pour $x \in R^n$,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{R>|z|\geq\epsilon} k(z)[f(x-z)-f(x)]dz = \int_{|z|\geq\epsilon} k(z)[f(x-z)-f(x)]dz \; ,$$

la limite étant atteinte uniformément en x , en vertu de ce que, d'après (2.4) et (1.3) ,

$$\Big|\int_{\epsilon_2>|z|\geq\epsilon_1} k(z)[f(x-z)-f(x)]dz\Big| \leq \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)|\, [f]_{o,\lambda}\, \frac{\omega_n}{\lambda}\,(\epsilon_2^\lambda - \epsilon_1^\lambda) \; .$$

c. q. f. d.

2.2. - Ainsi, à un noyau singulier k d'intégrale nulle sur la sphère unité [propriété (2.3)], on associe une application linéaire $\widetilde{k}$ de $C_k^{o,\lambda}(R^n)\,(0<\lambda\leq 1)$ dans $C(R^n)$ en posant,

(2.5) $$\widetilde{k}f(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} k_\epsilon * f(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|z|\geq\epsilon} k(z)f(x-z)dz \; ,$$

et on a aussi, pour chaque $R > 0$

(2.6) $$\widetilde{k}f(x) = \int_{|z|<R} k(z)[f(x-z) - f(x)]\, dz + \int_{|z|\geq R} k(z)\, f(x-z)\, dz$$
$$(x \in R^n,\ f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)) \; .$$

En outre, si, pour chaque $f \in C_k^{\infty}(R^n)$; on pose

$$(2.7) \qquad < Vpk, f > = \tilde{k}\check{f}(0) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \epsilon} k(z) f(z) dz \qquad [1] \quad ,$$

on définit une distribution Vpk sur R^n appelée la distribution valeur principale de k. Et on a,

$$(2.8) \qquad Vpk * f = \tilde{k} f \qquad \text{pour tout } f \in C_k^{o,\lambda}(R^n) \quad .$$

Cette relation est vraie, pour $f \in C_k^{\infty}(R^n)$ par définition de Vpk (relation (2.7)). Si $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$, on a, pour $\varphi \in C_k^{\infty}(R^n)$,

$$\begin{aligned} < Vpk * f, \varphi > &= (Vpk * f) * \check{\varphi}(0) = Vpk * (f * \check{\varphi})(0) \\ &= \tilde{k}(f * \check{\varphi})(0) \qquad , \text{puisque } f * \check{\varphi} \in C_k^{\infty}(R^n) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} k_\epsilon * (f * \check{\varphi})(0) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} < k_\epsilon * f, \varphi > \\ &= < \tilde{k} f, \varphi > \qquad \text{puisque } \lim_{\epsilon \downarrow 0} k_\epsilon * f = \tilde{k} f \end{aligned}$$

uniformément d'après la proposition 2.1. D'où (2.8), φ étant arbitraire.

2.3. - Exemple classique de l'opérateur de Hilbert.

Cas $n = 1$ - $k(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad (z \in R \quad , z \neq 0)$

Cas $n > 1$ - $k(z) = z_j \, |z|^{-(n+1)}$ $\qquad (z = (z_i) \in R^n \, , \; z \neq 0 \; , \; 1 \leq j \leq n)$.

§ 3 - Noyaux singuliers de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$.

3.1. - On appellera noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$ $(0 < \mu \leq 1)$ un noyau singulier k (n° 2.1) tel que

$$(3.1) \qquad k \in C_{loc}^{o,\mu}(R^n - \{0\})$$

$$(3.2) \qquad \int_{\Sigma_n} k(\theta) \, \sigma_n(d\theta) = 0 \quad .$$

[1] $\check{f}(x) = f(-x)$; toujours sous l'hypothèse (2.3) sur k.

Pour un tel noyau, on posera,

$$(3.3)\quad \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} = \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)| + \sup_{\substack{\theta'\in\Sigma_n,\theta''\in\Sigma_n\\ \theta'\neq\theta''}} \frac{|k(\theta'') - k(\theta')|}{|\theta''-\theta'|^{\mu}} .$$

En vertu de (3. 1) , $\|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} < +\infty$; inversement, si k est un noyau singulier tel que $\|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} < +\infty$, alors $k \in C^{o,\mu}_{loc}(R^n \setminus \{0\})$, ainsi qu'il résulte du lemme suivant :

LEMME .- Pour $0 < \mu \leq 1$ et $0 < \alpha < 1$, on pose ,

$$M_{\alpha,\mu} = 2^{\mu} + \operatorname*{Sup}_{1-\alpha\leq s\leq 1+\alpha} \frac{|s^n - 1|}{|s-1|^{\mu}} \quad (\text{on a } M_{\alpha,\mu} < +\infty) .$$

Alors, si k est un noyau singulier sur R^n (n° 2. 1) ,

$$(3.4)\quad |k(z') - k(z)| \leq M_{\alpha,\mu} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} |z'-z|^{\mu}\, |z|^{-(n+\mu)}$$

pour tout $z \in R^n \setminus \{0\}$, $z' \in R^n \setminus \{0\}$ tels que $|z'-z| \leq \alpha\, |z|$.

En effet, posant $|z| = \rho$, $|z'| = \rho'$, $z_1 = \rho^{-1} z$ et $z_1' = \rho'^{-1} z'$, on a , d'une part ,

$$\begin{aligned} |k(z') - k(z)| &= |\rho'^{-n} k(z_1') - \rho^{-n} k(z_1)| \\ &\leq \rho^{-n} \{ |k(z'_1) - k(z_1)| + |k(z'_1)|\, |(\tfrac{\rho'}{\rho})^{-n} - 1| \} \\ &\leq \rho^{-n} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \{ |z_1' - z_1|^{\mu} + |(\tfrac{\rho'}{\rho})^{-n} - 1| \} . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $|\rho'-\rho| \leq |z'-z|$,

$$|z_1' - z_1| \leq \frac{1}{\rho} |z'-z| + \rho' \left|\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right| \leq 2\rho^{-1} |z'-z| .$$

Enfin, $|z'-z| \leq \alpha\, |z|$ entraîne que $(1-\alpha)\rho \leq \rho' \leq (1+\alpha)\rho$.

D'où le lemme, puisque $\displaystyle\sup_{1-\alpha\leq s\leq 1+\alpha} \frac{|s^{-n} - 1|}{|s-1|^{\mu}} < +\infty$.

c . q. f. d.

Puisque $C^1(R^n\setminus\{0\}) \subset C^{o,\mu}_{loc}(R^n\setminus\{0\})$ $(0 < \mu \leq 1)$, tout noyau singulier k d'intégrale nulle sur la sphère unité (relation (3.2)) et de classe C^1 sur $R^n\setminus\{0\}$ est un noyau de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$. Il en est ainsi, en particulier, de l'opérateur de Hilbert (n° 2.3).

3.2 - THÉORÈME I. - Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \leq 1$, et k un noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$. Alors,

(1) il existe une constante $C_{\lambda,\mu} > 0$ [1] telle que, pour tout $f \in C^{o,\lambda}_k(R^n)$,

$$[\tilde{k}f]_{o,\lambda} \leq C_{\lambda,\mu} \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} [f]_{o,\lambda} \tag{3.5}$$

(2) pour chaque compact K de R^n, il existe une constante $C^K_{\lambda,\mu} > 0$ [1] telle que, pour tout $f \in C^{o,\lambda}_K(R^n)$, $\tilde{k}f \in C^{o,\lambda}(R^n)$ et

$$\|\tilde{k}f\|_{o,\lambda} \leq C^K_{\lambda,\mu} \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{o,\lambda} \quad . \tag{3.6}$$

Pour établir (3.5), on considère une fonction $f \in C^{o,\lambda}_K(R^n)$ et deux points x et x' de R^n, et on pose $|x'-x| = d > 0$.

En vertu de (2.6), on a, pour R assez grand,

$$\tilde{k}f(x') = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy + \int_{B_R(x')\setminus B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy \quad ,$$

puisque, f étant à support dans K, $\int_{R^n\setminus B_R(x')} k(x'-y)f(y)dy = 0$ dès que $B_R(x') \supset K$.

De même,

$$\begin{aligned}\tilde{k}f(x) &= \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy + \int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]\, dy \\ &= \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy + \int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x')]\, dy \ ,\end{aligned}$$

puisque $\int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)\, dy = 0$ d'après l'hypothèse (3.2).

---

[1] dépendant aussi de n, mais pas de k.

Ainsi, pour R assez grand,

(3.7) $\widetilde{K}f(x') - \widetilde{K}f(x) = I_1 - I_2 + I_3(R) + I_4(R) - I_5(R)$, où

$$I_1 = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]\,dy\ , \qquad I_2 = \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]\,dy$$

$$I_3(R) = \int_{B_R(x')\cap B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} [k(x'-y)-k(x-y)][f(y)-f(x')]\,dy\ ,$$

$$I_4(R) = \int_{B_R(x')\setminus(B_R(x')\cap B_R(x))} k(x'-y)[f(y)-f(x')]\,dy \quad \text{et} \quad I_5(R) = \int_{B_R(x)\setminus(B_R(x')\cap B_R(x))} k(x-y)[f(y)-f(x')]\,dy\ .$$

On majore alors séparément chacun de ces termes :

$$|I_1| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \int_{|y-x|\le 2d} \frac{dy}{|y-x|^{n-\lambda}} \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \int_{|y-x'|\le 3d} \frac{dy}{|y-x'|^{n-\lambda}}\ ,$$

puisque $|y-x| \le 2d \Rightarrow |y-x'| \le 3\,d$; d'où

$$(3.8) \quad |I_1| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda}\ \omega_n \int_0^{3d} \rho^{\lambda-1}\,d\rho = \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda}\, 3^\lambda\, d^\lambda\ ,$$

d'après (1.3) ; et, de même ,

$$(3.9) \qquad |I_2| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda}\, 2^\lambda\, d^\lambda$$. Ensuite ,

$$|I_3(R)| \le \int_{R^n\setminus B_{2d}(x)} |k(x'-y)-k(x-y)|\,|f(y)-f(x')|\,dy$$

$$\le M_{1/2,\mu} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda}\, d^\mu \int_{|y-x|\ge 2d} \frac{dy}{|y-x|^{n+\mu-\lambda}}\ ,$$

en vertu du lemme 3.1. ci-dessus,

$$\le M_{1/2,\mu} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda}\ \omega_n\, d^\mu \int_{2d}^{+\infty} \rho^{\lambda-\mu-1}\,d\rho$$; d'où

$$(3.10) \qquad |I_3(R)| \le M_{1/2,\mu} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda}\, \omega_n \frac{2^{\lambda-\mu}}{\mu-\lambda}\, d^{\lambda} \quad (^1)\ ..$$

Enfin

$$|I_4(R)| \le \int_{B_R(x')\setminus B_{R-d}(x')} |k(x'-y)|\,|f(y)-f(x')|\,dy \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{0,\lambda} \int_{B_R(x')\setminus B_{R-d}(x)} \frac{dy}{|y-x'|^n}$$

$$= \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|\ \omega_n \int_{R-d}^{R} \rho^{-1}\, d\rho = \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|\ \omega_n \log \frac{R}{R-d} \quad ;$$

d'où $\lim\limits_{R\to\infty} |I_4(R)| = 0$; et de même , $\lim\limits_{R\to\infty} |I_5(R)| = 0$.

D'où la majoration (3.5), en vertu de (3.8) , (3.9), (3.10), en faisant tendre R vers l'infini dans (3.7) .

La majoration (3.6) n'offre alors pas de difficulté : prenant $f \in C_K^{o,\lambda}(R^n)$, on a, d'après (2.6) (avec R = 1) ,

$$|\tilde{k} f(x)| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \int_{|z|<1} \frac{dz}{|z|^{n-\lambda}} + \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\| \int_{\substack{|z|\ge 1 \\ z\in x-K}} \frac{dz}{|z|^n} \quad ;$$

$$\le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{0,\lambda} \left\{ \frac{\omega_n}{\lambda} + \tau_n(K) \right\} .$$

c.q.f.d.

---

(1) On note ici l'importance de l'hypothèse $\lambda < \mu$.

3.3.- THÉORÈME II .- Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \le 1$, et k un noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$ (n° 3.1) . Alors l'opérateur de convolution $\tilde{k}$ associé à k (n° 2.2) applique <u>continûment</u> $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ (K compact de R^n , p entier ≥ 0) ; et on a ,

$$\text{(3.11)} \qquad D^\beta(\tilde{k}f) = \tilde{k}(D^\beta f) \qquad (f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)\,,\ \ 0 \le |\beta| \le p\,)$$

En langage de la Théorie des distributions, la relation (3.11) résulte immédiatement du Théorème I : si $f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$, on a (en notant D' la dérivation au sens des distributions) ,

$$D'^\beta(Vp\,k * f) = Vp\,k * D'^\beta f = Vp\,k * D^\beta f \in C^{o,\lambda}(R^n) \quad ,$$

pour $0 \le |\beta| \le p$. D'où $Vp\,k * f \in C^{p,\lambda}(R^n)$, et (3.11) .

On peut aussi procéder directement à partir des noyaux k_ϵ : si $f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$, on a, pour $\epsilon > 0$

$$k_\epsilon * f \in C^p(R^n) \quad \text{et} \quad D^\beta(k_\epsilon * f) = k_\epsilon * D^\beta f$$

$(0 \le |\beta| \le p)$ par simple dérivation sous le signe somme (voir l'appendice ci-dessous) ; on conclut alors grâce à la convergence uniforme de $k_\epsilon * f$ vers $\tilde{k}f$ lorsque ϵ tend vers 0 (proposition 2.1) .

La continuité de $\tilde{k}$ de $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ résulte alors de (3.11), de la continuité de $\tilde{k}$ de $C_K^{o,\lambda}(R^n)$ dans $C^{o,\lambda}(R^n)$ [majoration (3.6), Théorème I] , et de ce que la topologie de $C^{p,\lambda}(R^n)$ est engendrée par les applications $g \longrightarrow D^\beta g$ $(0 \le |\beta| \le p)$ de $C^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{o,\lambda}(R^n)$.

c.q.f.d.

§ 4 - Dérivation sous le signe somme pour un noyau homogène de degré 1-n - Noyaux de convolution régularisants .

4.1 - Une classe importante de noyaux de Calderón - Zygmund est introduite par la proposition suivante :

PROPOSITION . - Soit h une fonction de $C^1(R^n \setminus \{0\})$, positivement homogène de degré $1-n$ ($h(tz) = t^{1-n} h(z)$, $t > 0$, $z \in R^n \setminus \{0\}$).
Alors, pour $1 \leq i \leq n$, $k_i = D_i h$ est un noyau singulier d'intégrale nulle sur la sphère unité (propriété (2.3), n° 2.1).

En effet, $k_i \in C(R^n \setminus \{0\})$, et il est élémentaire que k_i est homogène de degré $1-n-1 = -n$. Il reste donc à montrer que $\int_{\Sigma_n} k_i(\theta)\sigma_n(d\theta) = 0$. Pour cela [1], soit $\rho \in C^1(R)$ telle que, $\operatorname{Supp} \rho \subset [1,2]$ et $\int_0^\infty \frac{\rho(t)}{t}\, dt = 1$. Une intégration par parties donne ,

$$\int_{R^n} D_i h(x)\, \rho(|x|)\, dx = - \int_{R^n} h(x)\rho'(|x|)\frac{x_i}{|x|}\, dx .$$

D'où , en calculant les deux membres en coordonnées polaires,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r}\, dr \int_{\Sigma_n} D_i h(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = - \int_0^{+\infty} \rho'(r)\, dr \int_{\Sigma_n} h(\theta).\, \theta_i \sigma_n(d\theta) \quad ;$$

et le résultat, puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r}\, dr = 1$ et $\int_0^{+\infty} \rho'(r)\, dr = 0$.

c. q. f. d.

---

[1] Cette démonstration est empruntée à AGMON dans "Lectures on elliptic boundary Problems" (van Nostrand Math. Studies) page 152 .

4.2 - Si m est un nombre réel ≥ 1, et si $h \in C^1(R^n \setminus \{0\})$ est homogène de degré $m-n$, h appartient à $\mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$; donc $h * f \in C(R^n)$ pour tout $f \in C(R^n)$. De plus, si $m > 1$, $D_i h$ est homogène de degré $m-1-n > -n$, donc $D_i h$ appartient aussi à $\mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$ $(1 \leq i \leq n)$. On va chercher à calculer $D_i(h * f)$ (où f est a priori non dérivable) en dérivant sous le signe somme dans l'intégrale $\int_{R^n} h(x-y)f(y)dy$, bien que le Théorème classique à ce sujet (voir l'appendice) ne soit pas applicable à cause de la singularité de h à l'origine. Quoi qu'il en soit :

THÉORÈME III. - Soit h une fonction de $C^1(R^n\setminus\{0\})$ positivement homogène de degré $m-n$, avec $m \geq 1$ $(h(tz) = t^{m-n}h(z)$, $t > 0$, $z \in R^n\setminus\{0\})$. Alors,

(1) si $m > 1$, pour tout $f \in C_k(R^n)$, $h * f \in C^1(R^n)$, et

(4.1) $$D_i(h * f) = (D_i h) * f \qquad (1 \leq i \leq n) .$$

(2) si $m = 1$, pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ $(0 < \lambda \leq 1)$, $h * f \in C^1(R^n)$, et

(4.2) $$D_i(h * f) = (\mathrm{Vp}\ D_i h) * f + C_i(h) f \qquad [1] , \text{ où}$$

(4.3) $$C_i(h) = \int_{\Sigma_n} h(\theta)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta) \qquad (1 \leq i \leq n) .$$

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. - Étant donnée une fonction $g \in C_k(R^n)$ et $\epsilon > 0$, on pose,

$$g_\epsilon(x) = \int_{|y-x| \geq \epsilon} g(y)dy \quad (x \in R^n). \text{ Alors, } g_\epsilon \in C^1(R^n), \text{ et}$$

(4.4) $$D_i g_\epsilon(x) = -\epsilon^{n-1} \int_{\Sigma_n} g(x+\epsilon\theta)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta) \qquad (x \in R^n, \ 1 \leq i \leq n) .$$

---

[1] voir les n^{os} 4.1 et 2.2 ci-dessus.

En effet, posant $X_\varepsilon = 1_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ $(X_\varepsilon(y) = 0$ si $|y| < \varepsilon$ et $X_\varepsilon(y) = 1$ si $|y| \geq \varepsilon)$, on a $g_\varepsilon = X_\varepsilon * g$. Il en résulte par dérivation sous le signe somme (voir l'appendice) que, si $g \in C_k^1(R^n)$, $g_\varepsilon \in C^1(R^n)$, et $D_i g_\varepsilon = X_\varepsilon * D_i g$; c'est-à-dire, $D_i g_\varepsilon(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} D_i g(x+y)dy = \varepsilon^n \int_{|z| \geq 1} D_i g(x+\varepsilon z)\, dz$; d'où (4.4) en intégrant par parties sur la variété à bord $R^n \setminus B_1(0) = M$ selon la formule $\int_M \operatorname{div} Z\, d\tau = \int_{\partial M} Z.n d\sigma$ où Z est le champ de vecteurs défini par $Z_j = 0$ $(j \neq i)$, et $Z_i(z) = g(x+\varepsilon z)$ $(z \in R^n \setminus B_1(0))$[1].

On passe ensuite au cas général $(g \in C_k)$ en considérant une suite (g_n) de fonctions de C_k^1 convergeant uniformément vers g.

c. q. f. d.

On établit alors comme suit le théorème III : on désigne par f une fonction de $C_k(R^n)$, et, pour $\varepsilon > 0$, on pose,

$$X_\varepsilon = 1_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)} \qquad \text{comme ci-dessus, et}$$

$$\Phi_\varepsilon(x, z) = \int_{R^n} X_\varepsilon(x-y)h(z-y)f(y)dy \qquad (x \in R^n,\ z \in R^n)\ , \text{ et} \tag{4.5}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \Phi_\varepsilon(x, x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} h(x-y)f(y)\, y\ . \tag{4.6}$$

On va montrer que la fonction Φ_ε est de classe C^1 sur $\{(x, z) \mid |x-z| < \varepsilon/2\}$, En effet, d'abord, pour x fixé, $\Phi_\varepsilon(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\{z \mid |z-x| < \varepsilon/2\}$, et on a,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_\varepsilon(x, z) = \int_{R^n} X_\varepsilon(x-y)D_i h(z-y)f(y)dy \qquad (|z-x| < \varepsilon/2)\ , \tag{4.7}$$

---

(1) ceci pour $n \geq 2$; pour $n = 1$, le lemme résulte d'un calcul direct élémentaire .

par dérivation sous le signe somme [le théorème rappelé dans l'appendice justifie une telle dérivation car la fonction $(z,y) \longrightarrow X_\epsilon(x-y)D_i h(z-y)f(y)$ est bornée pour $|z-x| < \epsilon/2$ et $y \in R^n$] .

Par ailleurs, désignant par γ_ϵ une fonction numérique de classe C^∞ sur R^n , nulle au voisinage de 0 et égale à 1 hors de $B_{\epsilon/2}(0)$, on a , pour z fixé et $|x-z| < \epsilon/2$

$\Phi_\epsilon(x,z) = \int_{R^n} X_\epsilon(x-y)\gamma_\epsilon(z-y)h(z-y)f(y)dy$ ce qui montre que, en vertu du lemme , $\Phi_\epsilon(\cdot,z)$ est de classe C^1 sur $\{x \mid |x-z| < \epsilon/2\}$, et que, pour $|x-z| < \epsilon/2$,

$$(4.8) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_\epsilon(x,z) = -\epsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(z-x-\epsilon\theta)\, f(x+\epsilon\theta)\, \theta_i \sigma_n(d\theta) .$$

Conjuguant alors (4.7) et (4.8) , on obtient que φ_ϵ est de classe C^1 sur R^n , et que, pour $x \in R^n$,

$$(4.9) \qquad \begin{aligned} D_i\varphi_\epsilon(x) &= \int_{|y-x|\geq\epsilon} D_i h(x-y)f(y)dy - \epsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(-\epsilon\theta)f(x+\epsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) , \\ &= \int_{|y-x|\geq\epsilon} D_i h(x-y)f(y)dy + \epsilon^{m-1}\int_{\Sigma_n} h(\theta)f(x-\epsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) \end{aligned}$$

en vertu de l'homogénéité de h .

Faisant tendre alors ϵ vers zéro dans (4.9), on voit que, le premier terme au second membre tend vers $D_i h * f(x)$ si $m > 1$, et vers $(\text{vp } D_i h) * f(x)$ si $m = 1$ et $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ (proposition 2.1), et le second terme vers 0 si $m > 1$ et vers $C_i(h)\, f(x)$ si $m = 1$, et ceci uniformément sur R^n . D'où le théorème, puisque $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \varphi_\epsilon(x) = h * f(x)$.

c. q. f. d.

4.3 - Noyaux de convolution m fois régularisants. Soient m un entier ≥ 1, et $\nu \in C^m(R^n\setminus\{0\})$ une fonction positivement homogène de degré $m-n$. Alors, pour $0 \leq |\beta| < m-1$, $D^\beta\nu \in C^{m-|\beta|}(R^n\setminus\{0\})$ est homogène de degré $m-|\beta|-n > -n$, donc $D^\beta\nu \in \mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$, et par application répétée du Théorème III (propriété (1)), on obtient,
pour tout $f \in C_k(R^n)$, $\nu * f \in C^{m-1}(R^n)$ et

$$D^\beta(\nu * f) = D^\beta\nu * f \qquad (0 \leq |\beta| \leq m-1) \quad . \tag{4.10}$$

En outre, si $|\beta| = m-1$, $D^\beta\nu \in C^1(R^n\setminus\{0\})$ est homogène de degré $1-n$; donc, d'après le théorème III (propriété (2)), pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ $(0 < \lambda \leq 1)$, $\nu * f \in C^m(R^n)$, et

$$D_i D^\beta(\nu * f) = \mathrm{vp}\, D_i D^\beta\nu) * f + C_i(D^\beta\nu) f \;. \tag{4.11}$$

Enfin, en conjuguant ce résultat avec le Théorème II (n° 3.3), on obtient :

THÉORÈME IV. - Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \leq 1$, et $\nu \in C^{m,\mu}_{loc}(R^n\setminus\{0\})$ une fonction homogène de degré $m-n$ (m entier ≥ 1). Alors, l'opérateur de convolution $f \longrightarrow \nu * f$ associé à ν applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda}(R^n)$ (p entier ≥ 0, K compact de R^n).

4.4 - Application au noyau Newtonien.

Supposant $n \geq 3$, on pose

$$\nu(z) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |z|^{2-n} \qquad (z \in R^n\setminus\{0\}) .$$

Alors (Théorème IV) :

PROPOSITION - Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$.

(1) Pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$, $\nu * f \in C^{2,\lambda}(R^n)$ et

$$\Delta(\nu * f) = -f . \tag{4.12}$$

(2) Pour tout compact K de R^n et tput entier $p \geq 0$, il existe une constante $C^K_{p,\lambda} > 0$ telle que, pour tout $f \in C_K^{p,\lambda}(R^n)$,

$$\|\nu * f\|_{p+2,\lambda} \leq C^K_{p,\lambda} \|f\|_{p,\lambda} \tag{4.13}$$

Un contre-exemple. Le noyau newtonien ν n'applique pas $C_k(R^n)$ dans $C^2(R^n)$:

On désigne par θ une fonction continue numérique de variable réelle telle que,

$$\theta(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u \leq 0$$
$$\theta(u) = \frac{1}{\log \frac{1}{u}} \quad \text{pour} \quad 0 < u < \alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$
$$\theta(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u \geq 1 \quad .$$

On désigne, d'autre part, par ψ une fonction de $C_k^\infty(R^n)$ égale à 1 au voisinage de 0 ; et on pose

$$f(x) = \psi(x)\,\theta(x_1^2 - \sum_{j=2}^{n} x_j^2) \quad .$$

Alors, $f \in C_k(R^n)$, et $\nu * f$ n'a pas de dérivée seconde par rapport à x_1 à l'origine.

Appendice. - Un théorème de dérivation sous le signe somme.

THÉORÈME. - Soient $I = [a,b]$ un intervalle compact de R, λ la mesure de Lebesgue sur I, Y un espace mesurable, et τ une mesure σ-finie sur Y. On désigne par $F : (t,y) \to F(t,y)$ une fonction mesurable sur $I \times Y$ ayant les propriétés suivantes :

(a) pour tout $y \in Y$, $F(\cdot, y)$ est de classe C^1 sur I ; on pose

(1) $F'(t,y) = \frac{d}{ds}/F(s,y)_{s=t}$ $\qquad (t \in I,\ y \in Y)$.

(b) $\int_a^b dt \int_Y \tau(dy)\,|F'(t,y)| < +\infty$

(c) la fonction $t \to \int_Y F'(t,y)\,\tau(dy)$ [définie presque partout sur I d'après (b)] est continue sur I.

(d) il existe $t_0 \in I$ tel que $F(t_0, \cdot) \in L^1(Y,\tau)$.

Alors, $F(t, .) \in L^1(Y,\tau)$ pour tout $t \in I$, la fonction $t \to \Phi(t) = \int_Y F(t,y)\,\tau(dy)$ est de classe C^1 sur I, et on a,

(2) $$\Phi'(t) = \int_Y F'(t,y)\,\tau(dy) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En effet, supposant, par exemple, que $t_o = a$ (hypothèse (d)), on pose

(3) $$\psi(t) = \int_a^t ds \int_Y F'(s,y)\,\tau(dy) \qquad (t \in I)$$

$\psi(t)$ est bien défini, pour chaque $t \in I$, en vertu de (b), et, en vertu de (c), ψ est de classe C^1 sur I et

(4) $$\psi'(t) = \int_Y F'(t,y)\,\tau(dy) \text{ pour tout } t \in I .$$

Par ailleurs, d'une part en vertu de (a), on a

(5) $$\int_a^t F'(s,y)ds = F(t,y) - F(a,y) \quad \text{pour } t \in I, \ y \in Y ;$$

d'autre part, en vertu de (b), l'application

$y \longrightarrow \int_a^t F'(s,y)\,ds$ est dans $L^1(Y,\tau)$, donc aussi, d'après (5), l'application $F(t,\cdot)(t\in I)$ puisque $F(a,\cdot) \in L^1(Y,\tau)$ en vertu de (d).

Finalement, le théorème de Fubini appliqué au second membre de (3) donne, compte tenu de (5),

(6) $$\psi(t) = \int_Y F(t,y)\,\tau(dy) - \int_Y F(a,y)\,\tau(dy) .$$

D'où le théorème en rapprochant (4) et (6)

c. q. f. d.