

SÉMINAIRE PAUL KRÉE

PAUL KRÉE

Classes d'opérateurs à puissances nucléaires

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 4, p. 1-12

[<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A4_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A4_0)

© Séminaire Paul Krée

(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSES D'OPÉRATEURS A PUISSANCES NUCLEAIRES

par Paul KRÉE

Cet exposé est motivé par la théorie des espaces nucléaires. Si E et F sont deux espaces vectoriels nucléaires (e. v. n.) sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $L(E, F)$ désigne l'e. v. n. des opérateurs linéaires continus de E dans F . Un sous-espace normé S de $L(E, F)$ est, par définition, un sous-espace vectoriel S de $L(E, F)$ muni d'une norme majorant la restriction à S de la norme de $L(E, F)$. Une classe C d'opérateurs linéaires continus entre e. v. n. est un procédé permettant d'associer à tout couple (E, F) d'e. v. n. un sous-espace normé

$$L_C(E, F)$$

de $L(E, F)$. Par exemple, la classe des opérateurs nucléaires est étudiée au § 1. Si n est un entier ≥ 1 fixé, la classe C est dite à puissance n -ième nucléaire si quels que soient les $(n+1)$ e. v. n. $E_1, \dots, E_{n+1}$, et quels que soient les n opérateurs $u_i \in L_C(E_i, E_{i+1})$, alors l'opérateur composé

$$u_n \circ \dots \circ u_1$$

est nucléaire. En pratique $n = 2$, et on se limite ici à l'étude des classes d'opérateurs quasi nucléaires, des opérateurs 1-sommants, et des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Dans ce dernier cas bien sûr, les e. v. n. considérés $E, F, \dots$ sont supposés hilbertiens.

1. Opérateurs nucléaires entre espaces normés [1] [2].

(1) DÉFINITION. — Soient E et F deux espaces normés. Une application linéaire continue $T : E \rightarrow F$ est dite nucléaire s'il existe des éléments $e'_n \in E'$ et $f_n \in F$ tels que

$$(2) \quad T = \sum_1^\infty e'_n \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \sum \|e'_n\| \|f_n\| < \infty.$$

Plus précisément, on doit avoir $Tx = \sum \langle e'_n, x \rangle f_n$, pour tout x dans E . L'espace vectoriel formé par ces opérateurs est noté $L_1(E, F)$. Pour tout

$$T \in L_1(E, F),$$

on pose

$$\|T\|_1 = \inf \sum_n \|e'_n\| \times \|f_n\|.$$

pour toutes les représentations de T sous la forme (2). Si $\|T\|$ désigne la norme usuelle de T , on a, pour tout x de E ,

$$\|Tx\| \leq \sum |\langle e'_n, x \rangle| \|f_n\| \leq (\sum \|e'_n\| \|f_n\|) \|x\|.$$

En prenant l'inf pour les représentations (2), il vient

$$\|T\|_1 \leq \|T\|.$$

(3) LEMME.

(a) S'il existe $T \in L(E, F)$ et une suite de Cauchy $T_\alpha \in L_1(E, F)$ telle que $(T_\alpha x) \rightarrow Tx$ pour tout $x \in E$, alors $T \in L_1(E, F)$ et $\|T - T_\alpha\| \rightarrow 0$.

(b) Si F est complet, alors $L_1(E, F)$ est complet.

(a) En effet, il existe une suite croissante α_k telle que

$$\|T_\alpha - T_\beta\| \leq 2^{-k-2} \text{ pour } \alpha \text{ et } \beta \geq \alpha_k.$$

Donc

$$T_{\alpha_{k+1}} - T_{\alpha_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^n \otimes y_k^n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} \|a_k^n\| \|y_k^n\| < 2^{-k-2}.$$

Pour $p = 1, 2, \dots$ et pour tout x de E , il vient

$$T_{\alpha_{k+p}} x - T_{\alpha_k} x = \sum_{\ell=k+k+p, k=1, \dots} \langle a_\ell^n, x \rangle y_\ell^n.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, il vient

$$Tx - T_{\alpha_k} x = \sum \sum_{n \geq 1} \langle a_\ell^n, x \rangle y_\ell^n.$$

Or

$$\|T - T_{\alpha_k}\|_1 \leq \sum \|a_\ell^n\| \|y_\ell^n\| = \sum_{\ell \geq k} 2^{-\ell-1} = 2^{-k-1}.$$

Donc $T - T_{\alpha_k}$ est nucléaire, et T est nucléaire. De plus,

$$\|T - T_\alpha\|_1 \leq \|T - T_{\alpha_k}\| + \|T_{\alpha_k} - T_\alpha\|_1 \leq 2^{-k} \text{ si } \alpha \geq \alpha_k.$$

Par conséquent, $(T_\alpha)_\alpha$ tend vers T dans $L_1(E, F)$.

(b) résulte de (a).

(4) LEMME.

(a) $E' \otimes F$ est dense dans $L_1(E, F)$.

(b) Tout opérateur nucléaire est précompact.

(a) En effet, pour tout $T \in L_1(E, F)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe des suites (e_n') et (f_n) telles que

$$\|T - \sum_{n=1}^{\infty} e_n' \otimes f_n\| \leq \varepsilon/2.$$

Puis il existe N tel que $\sum_{N+1}^{\infty} \|e_n'\| \|f_n\| < \varepsilon/2$. Alors

$$\|T - \sum_{n=1}^N e_n' \otimes f_n\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) résulte de (a).

(5) Autres définitions possibles de $L_1(E, F)$ si F est complet.

(a) Un opérateur $T \in L(E, F)$ est nucléaire s'il admet une factorisation

$$(6) \quad E \xrightarrow{u} \ell^\infty \xrightarrow{\lambda} \ell^1 \xrightarrow{v} F$$

avec u et v linéaires continus, λ étant la multiplication par une suite $(\lambda_n)_n \in \ell_1$.

En effet, la définition (2) signifie que

$$T = \sum \lambda_n e_n \otimes f_n \text{ avec } \sup \|e'_n\| < \infty, \sup \|f_n\| < \infty \text{ et } \sum |\lambda_n| < \infty.$$

Donc T admet la factorisation :

$$x \xrightarrow{u} (\langle e'_n, x \rangle)_n \xrightarrow{\lambda} (\lambda_n \langle e'_n, x \rangle)_n \xrightarrow{v} \sum_1^\infty \lambda_n \langle e'_n, x \rangle f_n.$$

(b) L'injection canonique $j : E' \otimes_\pi F \rightarrow L(E, F)$ est continue. Elle se prolonge en une application linéaire continue $\hat{j}$ de $E' \otimes F$ dans $L(E, F)$. Un opérateur $T \in L(E, F)$ est nucléaire s'il appartient à l'image de $\hat{j}$.

(7) PROPOSITION. - Soient quatre espaces normés E, F, G, H , et trois applications linéaires continues

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H.$$

Si v est nucléaire, alors $T = wvu$ est nucléaire, et

$$\|T\|_1 \leq \|w\| \|v\|_1 \|u\|.$$

En effet, soit $v = \sum f'_n \otimes g_n$ avec $A = \sum \|f'_n\| \|g_n\| < \infty$. Alors, pour tout x appartenant à E ,

$$Tx = w(vux) = w(\sum \langle f'_n, ux \rangle g_n) = \sum \langle f'_n, ux \rangle w(g_n).$$

D'où

$$T = \sum_1^\infty u'(f'_n) \otimes w(g_n) \text{ et } \|T\|_1 \leq \|u\| \|w\| A,$$

et l'inégalité cherchée, puisque $\inf A = \|v\|_1$.

(8) PROPOSITION. -

(a) Si T est nucléaire, la transposée T' de T est nucléaire et

$$\|T'\|_1 \leq \|T\|_1.$$

(b) Réciproquement, si F est réflexif et si le transposé d'un opérateur continu T est nucléaire, alors T est nucléaire, et $\|T'\|_1 = \|T\|_1$.

Démonstration.

(a) Si T est nucléaire, alors

$$T = \sum e'_n \otimes f_n \text{ avec } \|T\|_1 = \inf \sum \|e'_n\| \|f_n\| < \infty.$$

Ceci entraîne $T' = \sum f_n \otimes e'_n$, avec $f_n \in F \subset (F')' = F''$. Donc T' est nu-

cléaire, et $\|T^*\| \leq \inf \sum \|e_n^*\| \|f_n\| = \|T\|_1$.

(b) Soit T dans $L(E, F)$ tel que T^* soit nucléaire. Alors, vu (a),

$$T'' \in L_1(E'', F'') = L_1(E, F)$$

puisque F est réflexif, et $\|T''\|_1 \leq \|T^*\|_1$. Comme T est la composée de l'injection $E \rightarrow E''$ et de T'' , il vient, vu (7), $\|T\|_1 \leq \|T^*\|_1$.

(9) Factorisation à travers un Hilbert. - Tout opérateur nucléaire de E dans F supposé complet est la composée de deux applications linéaires continues

$$E \rightarrow H \rightarrow F,$$

où H est un espace de Hilbert.

En effet, dans (5.a), on peut supposer les $\lambda_n > 0$.

De (6), il résulte que $T \in L_1(E, F)$ admet la factorisation

$$E \xrightarrow{u} \ell^\infty \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \ell^2 \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \ell^1 \xrightarrow{v} F$$

où $\sqrt{\lambda}$ est l'opérateur de multiplication par la suite $(\sqrt{\lambda_n})_n$.

Malgré toutes ces propriétés sympathiques, les opérateurs nucléaires ont des propriétés surprenantes. Par exemple, si $T \in L_1(E, F)$ a son image contenue dans un sous-espace fermé F_1 de F , il se peut que $e \rightarrow T(e)$ ne soit pas nucléaire de E dans F_1 . Cependant, on a la proposition suivante.

(10) PROPOSITION. - Soient deux e. v. n. E et F . Pour toute $u \in L(E, F)$, soit $\hat{u} : \hat{E} \rightarrow \hat{F}$ le prolongement linéaire continu de u . Alors u est nucléaire si, et seulement si, $\hat{u}$ est nucléaire. On a alors $|u|_1 = |\hat{u}|_1$.

(11) LEMME. - Soit F un sous e. v. n. dense d'un e. v. n. G . Alors, pour tout $z \in G$ et tout $\eta > 0$, il existe une suite $(y_n)_n$ de F telle que $z = \sum y_n$ et $\sum |y_n| \leq (1 + \delta) |z|$.

En effet, pour tout n , il existe y_n^1 tel que $|z - y_n^1| \leq 2^{-n-1} \delta |z|$. Il suffit de poser $y_1 = y_1^1, \dots, y_n = y_n^1 - y_{n-1}^1$. En effet, $z = \lim y_n^1 = \lim \sum_{k \leq n} y_k$, et

$$|y_1| \leq (1 + 2^{-2} \delta) |z|; \quad |y_n| \leq (2^{-n-1} + 2^{-n}) \delta |z|.$$

Démonstration de la proposition. - Il est clair que $\hat{u}$ est nucléaire si u l'est, car $(\hat{E})' = E'$. Réciproquement si $\hat{u}$ est nucléaire, il existe des f_n dans $\hat{F} = G$ tels que $\hat{u} = \sum e_n^1 \otimes f_n$ avec $\sum |e_n^1| |f_n| < \infty$. Il suffit alors d'appliquer le lemme à chaque f_n .

(12) EXEMPLE. - Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F , et $A = WH$ sa décomposition polaire. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) A nucléaire,
 (b) H nucléaire,
 (c) H compact, et $\text{Tr } H$ fini.

Dans cet énoncé, l'expression " $\text{Tr } H$ fini" signifie que la suite des valeurs propres de l'opérateur hermitien compact H est sommable.

Preuve.

(b) entraîne (a) d'après (7). Réciproquement, (a) entraîne (b), car (a) entraîne

$$A = \sum \lambda_i e_i \otimes f_i \quad \text{avec} \quad \sum |\lambda_i| < \infty, \quad \sup \|e_i\| \leq 1, \quad \sup \|f_i\| \leq 1$$

d'où $H = \sum \lambda_i e_i \otimes W^{-1} f_i$.

Montrons que (b) entraîne (c). Les valeurs propres de l'opérateur hermitien positif compact H sont notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Soit $e_1, e_2, \dots$ un système orthonormé correspondant de vecteurs propres de H .

Soit P_k le projecteur orthogonal sur e_k , et $Q_k = P_1 + \dots + P_k$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $e_1 \dots e_k$. Posons $u_k = Q_k u$.

$$\|u_k\|_1 = \|Q_k u\| \leq 1 \|u\|_1.$$

Comme la norme $\|u_k\|_1$ est égale à la trace,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \|u\|_1.$$

Réciproquement, si $\sum \lambda_k < \infty$, la décomposition spectrale de u donne

$$u = \sum \lambda_k e_k \otimes e_k,$$

et, vu (1), u est nucléaire.

(13) PROPRIÉTÉ. - Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et soit

$$A \in \mathcal{L}(H_1, H_2).$$

Alors, pour que A soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit le composé de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Démonstration. - Soient A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidt

$$H_1 \xrightarrow{A} H_3 \xrightarrow{B} H_2,$$

et montrons que BA est nucléaire. Soit $U H$ la décomposition polaire de BA .

Soit $e_1, e_2, \dots$ une base orthonormale de H_1 formée par des vecteurs propres de H . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ les valeurs propres de H , et posons $h_n = U e_n$.

$$\lambda_n = (H e_n, e_n) = (U H e_n, U e_n) = (B A e_n, h_n) = (A e_n, B^* h_n) \leq \frac{1}{2} (\|A e_n\|^2 + \|B^* h_n\|^2).$$

Comme A et B sont de Hilbert-Schmidt, on a

$$\sum \|A e_n\|^2 < \infty \quad \sum \|B^* h_n\|^2 < \infty.$$

Par conséquent, $\sum \lambda_n < \infty$.

Réciproquement, soit N nucléaire, et soit $U H$ la décomposition polaire de N . Il suffit de noter que

$$N = U H = (U H^{\frac{1}{2}}) \cdot H^{\frac{1}{2}}$$

et que $H^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert-Schmidt, puisque H est nucléaire.

(14) LEMME (Supercontinuité). — Soient E, F, G trois espaces normés, et ℓ une application nucléaire de E dans F . Alors $u = \ell \otimes I_G$ est continue de $E \otimes_\epsilon G$ dans $F \otimes_\pi G$.

En effet, comme ℓ est nucléaire,

$$\ell = \sum e'_n \otimes f_n \quad \sum \|e'_n\| \|f_n\| < \infty.$$

Pour $t = \sum x_i \otimes f_i$, on a

$$u(t) = \sum (\ell x_i) \otimes f_i = \sum_n (\sum_i \langle x_i, e'_n \rangle y_i) \otimes f_n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\pi &\leq \sum \|f_n\| \|\sum \langle x_i, e'_n \rangle y_i\| \\ &\leq \sum \|f_n\| \sup_{\|f'\| \leq 1} |\sum \langle x_i, e'_n \rangle \langle y_i, f' \rangle| \\ &\leq \sum \|f_n\| \|e'_n\| \sup\{|\sum \langle x_i, e'_n \rangle \langle y_i, f' \rangle|, \|e'\| \leq 1, \|f'\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|u(t)\|_\pi \leq \|\ell\|_\pi \|t\|_\epsilon.$$

(15) Plus généralement, si l'on a $(2n)$ espaces normés E_j et F_j ($1 \leq j \leq n$), une application linéaire continue $u_1 : E_1 \rightarrow F_1$, et $(n-1)$ applications nucléaires $u_j : E_j \rightarrow F_j$ ($1 \leq j \leq n$), alors $u = \bigotimes u_j$ est continue de $\bigotimes_\epsilon E_j$ dans $\bigotimes_\pi F_j$ et

$$\|u\| \leq \|u_1\| \|u_2\|_1 \cdots \|u_n\|_1.$$

(16) LEMME. — Le produit tensoriel u de n applications nucléaires

$$u_j : E_j \rightarrow F_j$$

est nucléaire, et $\|u\|_1 \leq \prod_j \|u_j\|_1$.

(*) Pour tout j ,

$$u_j = \sum_{k_j} e_{k_j}^{j'} \otimes f_{k_j}^j, \quad \sum_{k_j} \|e_{k_j}^{j'}\| \|f_{k_j}^j\| = M_j < \infty.$$

Pour tout $\bigotimes x_j \in \bigotimes E_j$, on a

$$u(\bigotimes x_j) = (\sum_{k_1} \langle x_1, e_{k_1}^{1'} \rangle f_{k_1}^{1'}) \otimes (\sum_{k_2} \cdots).$$

Posant

$$e_{k_1 \dots k_n}^j = e_{k_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{j_n}; \quad f_{k_1 \dots k_n} = \bigotimes_j f_{k_j}^j$$

il vient

$$u = \sum_{k_1 \dots k_n} (e_{k_1 \dots k_n}^j \otimes f_{k_1 \dots k_n}) \cdot$$

$$\text{D'où } \|u\|_1 \leq \sum \|e_{k_1 \dots k_n}^j\| \|f_{k_1 \dots k_n}\| \leq \prod_j M_j \cdot$$

Donc u est nucléaire si $\bigotimes_j E_j$ et $\bigotimes_j F_j$ sont munis simultanément de la norme π , ou de la norme ε .

(177) LEMME (suite). - Soient $(2n)$ espaces normés E_j, F_j , et n applications nucléaires $u_j : E_j \rightarrow F_j$. Alors la transposée u' de $u = \bigotimes_j u_j$ applique $L(F_1, \dots, F_n)$ dans $E_1' \otimes \dots \otimes E_n'$. De plus, $\|u'\| \leq \prod \|u_j\|_1$.

En effet, pour $\bigotimes x_j \in \bigotimes E_j$ et $m \in L(F_1, \dots, F_n) \simeq (\bigotimes_{\pi} F_j)'$, on a

$$u' m(\bigotimes x_j) = m(u_1 x_1, \dots, u_n x_n)$$

et, vu (*)

$$= m(\sum_{k_1} \langle x_1, e_{k_1}^{j_1} \rangle f_{k_1}^{j_1}, \sum_{k_2} \dots) \cdot$$

Posant $\alpha_{k_1 \dots k_n} = m(f_{k_1}^{j_1}, \dots, f_{k_n}^{j_n})$, $(u' m) = \sum_{k_1 \dots k_n} \alpha_{k_1 \dots k_n} (e_{k_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{j_n})$ et

$$\|u' m\|_{\pi} \leq \|m\| \sum \|f_{k_1}^{j_1}\| \dots \|f_{k_n}^{j_n}\| \|e_{k_1}^{j_1}\| \dots \|e_{k_n}^{j_n}\| \leq \|m\| \prod_j M_j \cdot$$

(177)' Variante symétrique. - Soient E et F deux e. v. n., et soit $v \in L(E, F)$. Alors la transposée u' de $u = \bigotimes_n v$ applique ${}^n P(F)$ dans $\bigotimes E_j'$.

2. Opérateurs quasi nucléaires [1] [2].

(18) DÉFINITION. - Soient E et F deux espaces normés. L'opérateur $T \in L(E, F)$ est dit quasi-nucléaire s'il existe une suite (b_n') de E' telle que

$$(18)' \quad \sum \|b_n'\| < \infty \quad \text{et} \quad \|Te\| \leq \sum |\langle b_n', e \rangle| \quad \text{pour tout } e \text{ de } E.$$

Posant

$$\|T\|_{q,1} = \inf \sum \|b_n'\|,$$

on obtient une norme sur l'espace $L_{q,1}(E, F)$ des opérateurs quasi nucléaires de E dans F .

(19) Ces opérateurs ont une propriété analogue à (7). - Soient quatre espaces normés et trois opérateurs linéaires continus

$$\begin{array}{ccccc} U & T & V \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \longrightarrow H. \end{array}$$

Si T est quasi nucléaire, alors, VTU l'est aussi et

$$\|VTU\|_{q,1} \leq \|U\| \|V\| \|T\|_{q,1} \cdot$$

L'introduction de ces opérateurs est motivée par la proposition suivante.

(20) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et T nucléaire de E dans F . Soit G un sous-e. v. n. de F contenant $\text{im } T$. Alors $T : e \rightarrow Te$ est quasi-nucléaire de E dans G , et $\|T\|_{q,1} \leq \|T\|_1$.

En particulier, prenant $G = F$, il apparaît que tout opérateur nucléaire est quasi-nucléaire.

En effet, pour $\varepsilon > 0$,

$$T = \sum e_n' \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \sup \|f_n\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum \|e_n'\| \leq \|T\|_1 + \varepsilon.$$

D'où

$$\|Te\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n', e \rangle|, \quad \|f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n', e \rangle|.$$

(21) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire $T : E \rightarrow F$ se factorise à travers $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$:

$$E \xrightarrow{T_1} \ell^\infty \xrightarrow{T_2} F.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut s'arranger pour que $\|T_1\| \leq 1$, $\|T_2\| \leq \varepsilon + \|T\|_{q,1}$. En effet, si l'on a (18)', on peut supposer les b_n' non nuls. On pose

$$\mu_n = \|a_n\|^{\frac{1}{2}}, \quad e_n' = b_n \mu_n^{-1}.$$

On définit T_1 par $T_1 e = (\langle e_n', e \rangle)_n$. Puis $S_1 \in L(\ell^\infty, \ell^2)$ est défini par $S_1((\xi_n)_n) = \mu_n \xi_n$. Sur le sous-espace H de ℓ^2 , engendré par $\text{im } S_1 T_1$, on définit l'opérateur $S_2 : S_1 T_1 e \rightarrow T_e$. La norme de S_2 est majorée par $(\|T\|_{q,1} + \delta)^{\frac{1}{2}}$ car

$$\|S_2(S_1 T_1 e)\| = \|Te\| \leq \sum \mu_n^2 |\langle x, e_n' \rangle| \leq (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum \mu_n |\langle e, e_n' \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} \|S_1 T_1 e\|.$$

On a aussi

$$\|S_1\| \leq (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} = (\|T\|_{q,1} + \delta)^{\frac{1}{2}}.$$

Il suffit alors de poser $T_2 = \bar{S}_2 P S_1$, où P est l'opérateur de projection orthogonale de ℓ^2 sur l'adhérence $\bar{H}$ de H , et où $\bar{S}_2$ est le prolongement continu de S_2 à $\bar{H}$.

(22) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire T , à valeurs dans un espace normé $\ell^\infty(I)$ est nucléaire. De plus, $\|T\|_1 \leq \|T\|_{q,1}$.

(a) La démonstration utilise la remarque suivante : Pour tout sous-espace normé H_0 d'un normé H , toute application linéaire continue $S_0 : H_0 \rightarrow \ell^\infty(I)$ se prolonge en une application linéaire continue $S : H \rightarrow \ell^\infty(I)$ de même norme.

En effet, pour tout $i \in I$, il existe $\ell_i \in H_0'$ tel que $S_0 h = (\ell_i h)_i$. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach à chaque ℓ_i .

(b) Prouvons le lemme. Soit T quasi-nucléaire de E dans $\ell^\infty(I)$. Pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe une suite (e'_n) de F' telle que

$$\sum \|e'_n\| \leq \|T\|_{q,1} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Te\| \leq \sum |\langle e'_n, e \rangle|.$$

Appliquons (a) au sous-espace normé H_0 de $H = \ell^1(\mathbb{N})$ formé par les suites $(\langle e'_n, e \rangle)_n$, e décrivant E , et à l'opérateur $S_0 : (\langle e'_n, e \rangle)_n \rightarrow Te$. On obtient ainsi un prolongement $S : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(I)$ de norme majorée par 1. Ainsi T admet la factorisation

$$e \xrightarrow{U} \ell^1(\mathbb{N}) \xrightarrow{S} \ell^\infty(I),$$

où U applique e sur $(\langle e'_n, e \rangle)_n$. Notant (ε_n) la base canonique de ℓ^1 , il vient

$$Te = \sum (S\varepsilon_n) \langle e'_n, e \rangle.$$

D'où

$$\|T\|_1 \leq \sum \|S\varepsilon_n\| \|e'_n\| \leq \sum \|e'_n\| \leq \|T\|_{q,1} + \varepsilon,$$

et le lemme est démontré.

Les deux lemmes qui précèdent impliquent la proposition suivante.

(23) PROPOSITION. - Le composé de deux opérateurs quasi nucléaires

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$

est un opérateur nucléaire, et $\|ST\|_1 \leq \|S\|_{q,1} \|T\|_{q,1}$.

Il suffit d'appliquer le lemme (21) à S

$$E \xrightarrow{T} F \begin{array}{c} \xrightarrow{S} G \\ \searrow S_1 \quad \nearrow S_2 \\ \ell^\infty \end{array}$$

puis d'appliquer le lemme (22) à $S_1 T$.

(24) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et $T \in L_{q1}(E, F)$. Soient E_1 et F_1 deux sous-e. v. n. de E et F respectivement tels que $T(E_1) \subset F_1$. Alors l'application $u_1 : E_1 \rightarrow F_1$ qui coïncide avec u sur E_1 est quasi nucléaire.

En effet, la transposée de l'injection $j : E_1 \rightarrow E$ donne $j' : E' \rightarrow E'_1$. Si l'on a (18)', il vient, pour tout e de E_1 ,

$$\langle e, b' n \rangle = \langle je, b' n \rangle = \langle e, j' b' n \rangle.$$

D'où,

$$|T_1 e| \leq \sum |\langle e, j' b' n \rangle| \quad \text{avec} \quad \sum |j' b' n| < \infty,$$

et par conséquent, T_1 est quasi nucléaire.

(25) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et $T \in L(E, F)$, tel que T' soit nucléaire. Alors T est quasi nucléaire.

En effet, d'après (8.a), $T' : E'' \rightarrow F''$ est nucléaire. Il suffit alors d'appliquer à T' la proposition (24).

3. Opérateurs 1-sommants.

(26) DÉFINITION. - Soient E et F deux e. v. n., et soit $p \geq 1$. Un opérateur linéaire $T \in L(E, F)$ est dit p -sommant s'il existe $C > 0$ tel que, pour toute famille finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de E , on a

$$(\sum \|Tx_i\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\|x'\| \leq 1} (\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x' \rangle|^p)^{1/p}.$$

L'inf des C vérifiant cette condition est noté $\Pi_p(T)$. L'espace des opérateurs p -sommants de E dans F est noté $\Pi_p(E, F)$, et l'application $T \rightarrow \Pi_p(T)$ est une norme sur cet espace. Ces opérateurs ont été étudiés dans le séminaire de l'an dernier, mais en supposant E et F complets. En fait, cette hypothèse est inutile.

(27) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire $T : E \rightarrow F$ est 1-sommant et

$$\Pi_1(T) \leq \|T\|_{q,1}.$$

En effet, pour tout $\delta > 0$, il existe une suite (a'_n) d'éléments de E' tels que

$$\sum |a'_n| \leq \|T\|_{q,1} + \delta; \quad \forall x, \quad |Tx| \leq \sum |\langle x, a'_n \rangle|.$$

Posons

$$b'_n = \begin{cases} a'_n \|a'_n\|^{-1} & \text{si } \|a'_n\| \neq 0 \\ 0 & \text{si } \|a'_n\| = 0. \end{cases}$$

Une mesure positive μ sur la boule unité β de E' est construite en posant

$$\forall \varphi \in C(\beta), \quad \mu(\varphi) = \|a'_n\| \varphi(b'_n).$$

Alors, pour tout $x \in E$,

$$|Tx| \leq \int_{\beta} |\langle x, \xi \rangle| d\mu(\xi).$$

Donc T est 1-sommant et $\Pi_1(T) \leq \|T\|_{q,1} + \delta$.

D'où l'inégalité cherchée en faisant tendre δ vers zéro.

(28) PROPOSITION. - L'espace compact K est muni de la probabilité μ . Soit U l'injection de $C(K)$ dans $L^2_{\mu}(K)$. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt :

$$L^2_{\mu}(K) \rightarrow F.$$

Alors TU est un opérateur nucléaire et

$$\|TU\|_n \leq \|T\|_2.$$

Démonstration.

(a) On suppose d'abord que $T = \sum_1^R f_r \otimes y_r$, où les f_r sont des fonctions étagées. En exprimant les f_r en fonction des fonctions caractéristiques $g_1 \dots g_m$ d'ensembles mesurables disjoints, il vient

$$T = \sum_1^M g_r \otimes y_r$$

Pour toute $\varphi \in C(K)$, $TU \varphi = \sum (fg_r \varphi d\mu) y_r$.

D'où

$$TU = \sum \mu_r \otimes y_r \text{ avec } \mu_r = g_r \mu$$

$$\|TU\|_\pi \leq \sum \|\mu_r\| \|y_r\|.$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\|TU\|_\pi \leq (\sum \|\mu_r\|)^{\frac{1}{2}} (\sum \|\mu_r\| \|y_r\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\|\mu_r\| = \mu(E_r)$, $\sum \|\mu_r\| \leq 1$. Comme les fonctions $g_r/\mu(E_r)^{\frac{1}{2}}$ forment un système orthonormé, le deuxième terme est majoré par $\|T\|_r$.

Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt arbitraire. Comme le sous-espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est dense dans L_μ^2 , $\mathcal{E} \otimes F$ est dense dans $L_2(L_\mu^2, F)$. Il existe donc une suite $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs du type $\sum f_r \otimes y_r$, qui tend vers T dans L_2 .

$$\|T_j - T_\ell\|_\pi \leq \|T_j - T_\ell\|_r \rightarrow 0.$$

Par application de (), $(T_j U)$ tend vers un opérateur nucléaire, et cet opérateur est TU .

(29) PROPOSITION. - L'espace compact K est muni de la probabilité μ . Soit U l'injection de $C(K)$ dans L_μ^2 . Alors pour tout opérateur continu T d'un espace de Hilbert E dans $C(K)$, l'opérateur UT est de Hilbert-Schmidt, et

$$\|UT\|_r \leq \|T\|.$$

En effet, soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de E . Soit $\varphi_i = Te_i$.

$$\sum |\varphi_i(x)|^2 = \sum |\langle Te_i, \delta_x \rangle|^2 = \sum |\langle e_i, T^* \delta_x \rangle|^2 = \|T^* \delta_x\|_E^2 \leq \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

Alors il vient après intégration

$$\sum \|UTe_i\|^2 = \int \sum |\varphi_i(x)|^2 d\mu(x) \leq \|T\|^2.$$

(30) THÉORÈME. - Le composé de deux opérateurs 1-sommants est un opérateur nucléaire.

En effet, soient deux opérateurs 1-sommants

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G.$$

Soient respectivement M et N les boules unités de E' et F' , munies de la topologie faible. En utilisant la factorisation de A. PIETSCH, il apparaît que T se factorise en

$$E \rightarrow C(M) \rightarrow L_{\mu}^2(M) \rightarrow F ,$$

où μ est la mesure de Pietsch associée à T . Appliquant la même factorisation à S , il apparaît que ST se factorise en

$$E \rightarrow C(M) \rightarrow L_{\mu}^2(M) \rightarrow F \rightarrow C(N) \rightarrow L_{\nu}^2(N) \rightarrow G .$$

└──────────────────────────┘

Appliquant la proposition précédente, il apparaît que l'opérateur marqué d'une accolade est de Hilbert-Schmidt. Par application de (26), l'opérateur

$$C(M) \rightarrow L_{\nu}^2(N)$$

est nucléaire. Puis, par application de (7), l'opérateur ST est nucléaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PERSSON (A.) und PIETSCH (A.). - p -nukleare und p -integrale Abbildungen, *Studia Math.*, Warszawa, t. 33, 1969, p. 19-62.
- [2] PIETSCH (A.). - Nuclear locally convex spaces. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (*Ergebnisse der Mathematik*, 66).

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS
