

# SÉMINAIRE PAUL KRÉE

PETER SJÖGREN

**Un contre-exemple pour le noyau reproduisant de la mesure gaussienne dans le plan complexe**

*Séminaire Paul Krée*, tome 2 (1975-1976), exp. n° 10, p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=SPK\\_1975-1976\\_\\_2\\_\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A10_0)

© Séminaire Paul Krée

(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UN CONTRE-EXEMPLE POUR LE NOYAU REPRODUISANT  
 DE LA MESURE GAUSSIENNE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Peter SJÖGREN

Dans le plan complexe, nous considérerons la mesure gaussienne

$$d_v(z) = \pi^{-1} \exp(-|z|^2) dx dy, \quad z = x + iy.$$

Soit  $F^p$ ,  $0 < p < \infty$ , l'espace des fonctions entières appartenant à  $L_v^p$ , muni de la quasi-norme induite par  $L_v^p$ . On sait que le noyau reproduisant de  $v$  est

$$\exp(w\bar{z}),$$

au sens que la transformation

$$Tf(w) = \int \exp(w\bar{z}) f(z) d_v(z)$$

est l'identité sur chaque  $F^p$ ,  $p > 1$ . Si  $f \in L_v^p$ ,  $p > 1$ , la fonction  $Tf$  est entière, et à l'aide de l'inégalité de Hölder, on montre que

$$Tf(w) = O(\exp(p'|w|^2/4)) \quad , \quad w \rightarrow \infty,$$

et donc que  $Tf \in L_{v, \text{faible}}^{4/p'}$ . Ici  $p' = p/(p-1)$ . Nous allons démontrer que l'image  $TL_v^p$  n'est contenu dans aucun  $L_v^q$  avec  $q > 4/p'$ . Comme corollaire, nous verrons que  $F^{p'}$  n'est pas le dual de  $F^p$  si  $1 < p < \infty$  et  $p \neq 2$ . Ce dernier résultat subsiste en dimension quelconque, finie ou infinie, si on définit  $F^p$  à l'aide de la (pro-)mesure gaussienne.

THÉOREME. - Soient  $1 < p \leq \infty$  et  $q > 4/p'$ . Alors il existe une fonction  $f \in L_v^q$  telle que  $Tf \notin L_v^q$ .

COROLLAIRE. - Soit  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$ . Le dual de  $F^p$  n'est pas  $F^{p'}$ , au sens suivant : Il existe des fonctionnelles linéaires et continues sur  $F^p$  qui n'admettent pas la représentation de la forme  $f \rightarrow \int f\bar{g} d_v$  avec  $g \in F^{p'}$ .

Démonstration du théorème. - Avec  $0 < b \leq 1$ , on pose

$$f(z) = \chi \exp((1-b)|z|^2),$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique du demi-plan  $\{x > 0\}$ . Après quelques calculs élémentaires, on trouve

$$Tf(w) = (\pi b)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_w} \exp(-bz^2) dz,$$

où  $\Gamma_w$  est la courbe  $\tau \rightarrow \tau - w/2b$ ,  $\tau \geq 0$ . Notant  $w = s + it$ , on a donc

$$\partial Tf(w)/\partial s = (4\pi b^3)^{-\frac{1}{2}} \exp(-w/4b).$$

Si  $t > 1$  et  $|s| < b/t$ , il suit

$$\operatorname{Re} \partial T f(w) / \partial s \geq c_1 \exp(t^2/4b) .$$

Les constantes  $c_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ne dépendent que de  $b$ . Mais alors on a, pour chaque  $t > 1$ ,

$$|\operatorname{Re} T f(s + it)| \geq c_2 t^{-1} \exp(t^2/4b)$$

dans au moins la moitié de l'intervalle  $|s| < b/t$ . Par conséquent,  $Tf \notin L_v^q$  pour  $q > 4b$ . Puisque  $f \in L_v^p$  pour  $p < 1/(1-b)$ , et  $f \in L_v^\infty$  pour  $b = 1$ , la démonstration est terminée.

Démonstration du corollaire. - Toute fonction  $g \in L_v^{p'}$  définit une fonctionnelle continue  $f \rightarrow \int f \bar{g} d\nu$  sur  $F^p$ . En supposant que  $F^{p'}$  soit le dual de  $F^p$ , on déduit l'existence d'une  $h \in F^{p'}$  telle que

$$\int f \bar{g} d\nu = \int f \bar{h} d\nu, \quad f \in F^p .$$

Choisissant  $f(z) = e^{\bar{w}z}$  pour  $w$  complexe quelconque, on trouve  $h = Tg$ . Il en résulte que  $T$  applique  $L_v^p$  dans  $F^p$ . Mais ceci est en contradiction avec le théorème, car  $p > 4/p'$  dès que  $p \neq 2$ . Le corollaire est démontré.

Remarque. - Puisque  $F^2$  est un espace de Hilbert, et donc son propre dual, la démonstration du corollaire prouve que  $T$  applique  $L_v^2$  dans  $F^2$ . Par contre, pour  $1 < p \leq 2/\sqrt{3}$ ,  $T$  n'applique pas  $L_v^p$  dans  $F^{4/p'}$ , comme on peut le montrer en considérant la fonction

$$f(z) = \chi(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}p} (\log(2 + y^2))^{-\epsilon-1/p} \exp(|z|^2/p) .$$

Ici  $\epsilon > 0$  est petit, et  $\chi$  est la fonction caractéristique de la bande

$$\{0 < x < 10 p'\} .$$

Pour les autres valeurs de  $p$ , nous ne savons pas si  $T$  applique  $L_v^p$  dans  $F^{4/p'}$ .

Peter SJÖGREN  
Department of Mathematics  
University of Uppsala  
Sysslomansg. 8  
S-75223 UPPSALA (Suède)

---