

SÉMINAIRE PAUL KRÉE

PAUL KRÉE

Utilisation de limites inductives généralisées d'espaces localement convexes

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A2_0

© Séminaire Paul Krée

(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UTILISATION DE LIMITES INDUCTIVES GÉNÉRALISÉES D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par Paul KRÉE

0. Introduction.

(0.1) Rappelons d'abord la notion classique de limite inductive d'espaces localement convexes [1].

Soit $(E_\alpha, i_{\alpha\beta}, \alpha \text{ et } \beta \in A)$ un système inductif d'espaces vectoriels sur le corps $\Lambda = \underline{\mathbb{R}}$ ou $\underline{\mathbb{C}}$. Soit E la limite inductive de ce système ; l'injection canonique de E_α dans E est notée i_α . On suppose que chaque E_α est muni d'une topologie localement convexe t_α compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Alors $t = \varinjlim t_\alpha$ est la topologie localement la plus fine sur E rendant continues les applications t_α .

On a aussi la notion de limite inductive stricte. Ces notions sont utiles dans la théorie des distributions [6] et dans la théorie des mesures de Radon sur les espaces localement compacts.

(0.2) Dans [3], GARLING a généralisé la définition ci-dessus de $\varinjlim t_\alpha$ en imposant aux applications i_α d'être seulement continues sur des parties fixées des espaces E_α . Puis dans un deuxième article [2], FREMLING, GARLING et HAYDON ont utilisé cette généralisation pour faire apparaître l'ensemble des mesures de Radon bornées sur un espace complètement régulier X comme le dual topologique de l'espace des fonctions continues bornées sur X muni d'une topologie adéquate.

Dans [5], les résultats de GARLING sont utilisés pour définir les vraies distributions sur un espace de Banach. Ces applications motivent cet exposé des résultats de GARLING.

1. Limites inductives généralisées (ou S-limites inductives).

Tous les espaces vectoriels (e. v.) considérés sont pris sur le corps $\Lambda = \underline{\mathbb{R}}$ ou $\underline{\mathbb{C}}$.

(1.3) DÉFINITION. - Soit $(E_\alpha, i_{\alpha\beta}, \alpha \text{ et } \beta \in A)$ un système inductif d'e. v. Chaque E_α est muni d'une topologie localement convexe t_α et, pour tout α , on donne une partie S_α non vide de E_α ; on pose $S = (S_\alpha)$. On note j_α la restriction de i_α à S_α . La S-limite inductive des t_α est la topologie localement convexe la plus fine t sur $E = \varinjlim E_\alpha$ qui rende continues les applications j_α .

On pose

$$t = S \varinjlim_{\alpha} t_{\alpha} .$$

L'ensemble des topologies localement convexes sur E qui rendent continues les j_{α} est non vide. Il suffit alors de prendre pour t la borne supérieure de ces topologies. Donc la topologie, définie dans la définition ci-dessus, existe, et est unique.

(1.4) La topologie t a la propriété universelle usuelle des topologies limites inductives :

Si v est une application linéaire de E , dans l'espace localement convexe F , alors v est continue si, et seulement si, $v j_{\alpha}$ est continue pour tout α dans A .

Pour pouvoir développer une théorie, GARLING fait quelques hypothèses restrictives sur les S_{α} , ces hypothèses étant vérifiées dans l'étude des applications visées.

(1.5) Dans la suite, on suppose que :

(a) La réunion des $i_{\alpha}(S_{\alpha})$ engendre algébriquement E ;

(b) Quels que soient α et β dans A , il existe γ dans A tel que

$$j_{\alpha}(S_{\alpha}) + j_{\beta}(S_{\beta}) \subset j_{\gamma}(S_{\gamma}) ;$$

(c) Si $j_{\alpha}(S_{\alpha}) \subset j_{\beta}(S_{\beta})$, alors $j_{\alpha\beta} = j_{\beta}^{-1} j_{\alpha}$ est continue ;

(d) Chaque S_{α} est disqué, c'est-à-dire que quels que soient x et y dans S_{α} , quels que soient les scalaires λ et μ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, alors

$$\lambda x + \mu y \in S_{\alpha} .$$

(1.6) On déduit de ces restrictions :

(e) $\forall a > 0$, $\forall \alpha \in A$, $\forall \beta \in A$; $j_{\alpha}(S_{\alpha}) \subset a j_{\beta}(S_{\beta})$;

(f) La réunion des $j_{\alpha}(S_{\alpha})$ est égale à E .

Notons que (e) est évidente si $a \geq 1$, car il suffit alors de prendre $\beta = \alpha$. Si $a < 1$, on introduit n entier tel que $n \leq 1/a < n+1$; puis on applique la propriété (1.5 (b)) $n+1$ fois, avec $\alpha = \beta$.

La propriété (f) résulte des propriétés (a) et (e).

Le lemme suivant, énoncé dans A. GROTHENDIECK [4], simplifie l'étude de la continuité des applications j_{α} intervenant dans la définition de t . En effet, ce lemme permet de remplacer la condition de continuité de j_{α} par la condition plus simple de continuité à l'origine de j_{α} :

(1.7) LEMME. - Soient E et F deux espaces localement convexes, et A une

partie convexe équilibrée de E . Soit i une application linéaire $E \rightarrow F$ (ou une semi-norme si F est égal au corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $j = i|_A$ la restriction de i à A . Alors j est uniformément continue sur A si, et seulement si, j est continue à l'origine.

Démonstration. - L'uniforme continuité entraîne évidemment la continuité en tout point. Réciproquement, supposons j continue à l'origine, et soit V un voisinage de l'origine dans F . On cherche un voisinage U de l'origine de E tel que

$$x \text{ et } y \in A ; x - y \in U \Rightarrow j(x) - j(y) \in V .$$

(a) Si i est linéaire, on cherche donc U tel que

$$x \text{ et } y \in A , x - y \in U \Rightarrow i(x - y) \in V .$$

Or A étant convexe équilibré, on a

$$x - y \in A - A = 2A .$$

Il suffit donc de trouver U tel que

$$i(2A \cap U) \subset V ,$$

et cette condition s'écrit encore

$$i(A \cap \frac{1}{2} U) \subset \frac{1}{2} V .$$

Or l'existence de U vérifiant cette condition résulte de la continuité de j à l'origine.

(b) On fait un raisonnement analogue si i est une semi-norme, en utilisant l'inégalité

$$|j(x) - j(y)| \leq j(x - y) .$$

(1.8) La notation $\Gamma_{j \in J}(P_j)$: Soit $(P_j)_{j \in J}$ une famille de parties de l'espace vectoriel E . On note $\Gamma_{j \in J}(P_j)$ l'enveloppe disquée de la réunion des P_j .

(1.9) PROPOSITION. - La famille des parties $\Gamma_{\alpha \in A}(j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha))$, où V_α décrit la famille des t_α -voisinages disqués de l'origine de E_α , forme une base de voisinages de l'origine de E pour la topologie t .

Preuve. - La famille des parties $\Gamma_{\alpha \in A} j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha)$ forme une base de filtre d'ensembles disqués absorbants, puisque les V_α jouissent de la même propriété.

(a) Montrons d'abord que la famille de ces parties vérifie les axiomes d'une base de voisinages de l'origine pour une topologie localement convexe t' :

(α) Pour toute partie F_i de la famille et tout λ compris entre 0 et 1, il existe F_j contenu dans λF_i .

(β) Pour toute partie F_i de la famille, il existe F_j tel que $F_j + F_j \subset F_i$.

Prouvons (α) : On se donne $F_i = \Gamma(j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha))$.

D'après (1.6.e), il existe β tel que

$$j_{\alpha}(S_{\alpha}) \subset \lambda j_{\beta}(S_{\beta}) \subset j_{\beta}(S_{\beta}) .$$

D'après (1.5.c), étant donné un voisinage V_{β} de 0 dans E_{β} , il existe un voisinage W_{α} de 0 dans E tel que

$$j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap W_{\alpha}) \subset j_{\beta}(S_{\beta} \cap \lambda V_{\beta}) .$$

$$\text{Par suite, } j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap W_{\alpha}) \subset \lambda j_{\beta}(S_{\beta}) \cap j_{\beta}(S_{\beta} \cap \lambda V_{\beta}) .$$

Donc

$$j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap W_{\alpha}) \subset \lambda j_{\beta}(S_{\beta} \cap V_{\beta}) .$$

A fortiori,

$$\Gamma_{\alpha \in A} j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap W_{\alpha}) \subset \lambda \Gamma_{\alpha \in A} j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap V_{\alpha}) .$$

C. Q. F. D.

On démontre de même (β) , en utilisant (1.5.b) au lieu de (1.6.e).

(b) Il reste à montrer que $t' = t$. Pour chaque indice α , l'application $j_{\alpha} : S_{\alpha} \rightarrow (E, t')$ est continue de sorte que $t' \subset t$, puisque t avait été définie comme la topologie la plus fine rendant les j_{α} continues. Réciproquement, si V est un voisinage disqué de 0 dans (E, t) , comme j_{α} est continue, de S_{α} dans (E, t) , on peut trouver un t_{α} -voisinage V_{α} de 0 dans E_{α} tel que $j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap V_{\alpha}) \subset V$. Donc

$$V \supset \Gamma j_{\alpha}(S_{\alpha} \cap V_{\alpha}) ,$$

et t' est plus fine que t . Finalement, $t = t'$, et la proposition est démontrée.

(1.10) COROLLAIRE.

(a) Une partie disquée V de E est un t -voisinage de 0 dans E si, et seulement si, pour tout α , $j_{\alpha}^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans S_{α} pour la topologie induite par t_{α} .

(b) Une semi-norme p sur E est t -continue si, et seulement si, pour tout α , $p \circ j_{\alpha}$ est une semi-norme continue sur (E_{α}, t_{α}) .

(1.11) Remarques.

(a) Soit B une partie de A telle que $(j_{\beta}(S_{\beta}))_{\beta \in B}$ soit cofinale dans $(j_{\alpha}(S_{\alpha}))_{\alpha \in A}$. Alors la topologie t , définie précédemment, coïncide avec la topologie analogue, déduite en remplaçant B par A .

(b) En particulier, si l'ensemble d'indices est dénombrable, on peut toujours choisir une suite d'indices $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(j_{\alpha_n}(S_{\alpha_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ soit cofinale dans $(j_{\alpha}(S_{\alpha}))_{\alpha \in A}$, et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad j_{\alpha_n}(S_n) \subsetneq j_{\alpha_{n+1}}(S_{n+1}).$$

Donc, lorsqu'on aura un ensemble d'indices dénombrable, on pourra supposer $j_i(S_i) \subset j_{i+1}(S_{i+1})$.

Et même, si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs tous supérieurs à 1, on peut supposer

$$b_i j_i(S_i) \subset j_{i+1}(S_{i+1}).$$

Il suffit d'utiliser (1.5.b).

2. Notion de S-limite inductive stricte.

Nous identifions dès lors chaque E_α à une partie de la limite inductive E . On sait que $j_\alpha : S_\alpha \rightarrow E$ est continue pour tout α , ce qui signifie que la topologie induite par t sur S_α est moins fine que celle induite par t_α .

Question : Dans quels cas ces topologies coïncident-elles ?

On aimerait avoir un énoncé analogue à celui des limites inductives strictes concernant les limites inductives usuelles d'espaces localement convexes (voir, par exemple, N. BOURBAKI [1], chap. II, §2, n° 4 et 5). Naturellement, l'énoncé souhaité doit se réduire à l'énoncé classique, dans le cas particulier où $S_\alpha = E_\alpha$ pour tout α . Ceci motive le théorème suivant.

(2.12) THÉORÈME (GARLING). - On se donne un système inductif dénombrable (E_n, t_n) d'espaces localement convexes. On se donne, pour tout n , une partie disquée S_n de E_n , la suite S_n étant croissante et vérifiant :

(a) On suppose que, pour tout n , t_n et t_{n+1} induisent la même topologie sur S_n . Alors, pour tout n , t et t_n induisent la même topologie sur S_n .

(b) On suppose, en plus, que, pour tout n , S_n est une partie fermée de S_{n+1} , pour la topologie induite par t_{n+1} . Alors une partie quelconque B de E est t -bornée si, et seulement si, B est contenu dans un S_n et si B est une partie t_n -bornée de E_n .

Par analogie avec la terminologie usuelle, si le système S des S_n vérifie toutes les hypothèses énoncées dans ce théorème, on peut dire que t est la S -limite inductive stricte des topologies t_n relativement au système S des S_n . On notera que la preuve de ce théorème (voir [2]) est très différente de la preuve classique concernant le cas particulier des limites inductives strictes usuelles.

3. Distributions bornées sur un e. v. réel X_i de dimension finie [6].

(3.13) On utilise les résultats et les notations de L. SCHWARTZ pour la théorie des distributions ; à ceci près que les distributions intégrables de I_* , SCHWARTZ seront appelées distributions bornées.

Rapportons X_i à une base quelconque, les coordonnées du point x de X_i étant notées $x_1, x_2, \dots, x_n$. L'espace $\mathcal{B}^k(X_i)$ défini dans l'introduction est muni de la norme

$$\varphi \longrightarrow \|\varphi\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |(\partial/\partial x)^\alpha \varphi(x)|.$$

On peut munir $\mathcal{B}^k(X_i)$ de la topologie t_∞ associée à cette norme, ou de la topologie t_K de la convergence uniforme des $\partial^\alpha \varphi = (\partial/\partial x)^\alpha \varphi$ sur tout compact de X_i . On note B la boule unité de $\mathcal{B}^k(X_i)$. L'espace $\mathcal{O}^k(X_i)$ est le sous-espace de $\mathcal{B}^k(X_i)$ formé par les fonctions à support compact. L'espace $\mathcal{B}^k(X_i)$ des distributions bornées d'ordre au plus k est le dual de $\mathcal{O}^k(X_i)$ muni de la topologie induite par t_∞ . Soit A l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de longueur $|\alpha| = \sum \alpha_j$, inférieure ou égale à k . L'application $\varphi \longrightarrow \{\partial^\alpha \varphi; \alpha \in A\}$ identifie $\mathcal{O}^k(X_i)$ à un sous-espace topologique du produit de A exemplaires de l'espace $\mathcal{O}^0(X_i)$. Le théorème de Hahn-Banach montre que toute T de $\mathcal{B}^k(X_i)$ s'écrit

$$(3.13.1) \quad T = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \mu_\alpha,$$

où les μ_α sont des mesures bornées sur X_i . Cette formule montre que la forme linéaire sur $\mathcal{O}^k(X_i)$, associée à toute $T \in \mathcal{B}^k(X_i)$, s'étend canoniquement en une forme linéaire sur $\mathcal{B}^k(X_i)$. Il suffit de poser, pour toute f de $\mathcal{B}^k(X_i)$:

$$(3.13.2) \quad T(f) = \lim_j (\zeta_j f),$$

où (ζ_j) est une suite de fonctions plateaux $\zeta_j \in \mathcal{O}(X_i)$ qui tend vers 1 dans $(\mathcal{B}^k(X_i), t_x)$, chaque ζ_j valant 1 au voisinage de l'origine.

(3.14) LEMME.

(a) $\mathcal{B}^k(X)$ est le dual de $\mathcal{B}^k(X)$ muni de la topologie localement convexe la plus fine t^k qui coïncide avec t_K sur B .

(b) Les ensembles équicontinus L de formes linéaires sur $(\mathcal{B}^k(X), t^k)$ sont les ensembles de formes linéaires sur $\mathcal{B}^k(X)$ qui vérifient simultanément les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) Elles sont uniformément bornées pour t_∞ :

$$\sup\{|\ell(\varphi)|; \ell \in L, \varphi \in B\} < \infty.$$

(ii) Elles vérifient uniformément la condition suivante, $\forall \varepsilon$, $\exists$ compact K de X_i , $\exists \eta > 0$:

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B \text{ avec } \sum \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| < \eta; \text{ alors } |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

(c) Finalement (ii) peut être remplacée par :

(ii)' $\forall \varepsilon$, $\exists$ compact K de X_i ,

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B \text{ avec } \varphi \text{ nulle sur } K; \text{ alors } |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

Les conditions (ii) et (ii)' sont appelées "conditions du type (ε, K) ".

Démonstration. - Il est clair qu'un ensemble L de formes linéaires sur $\mathcal{B}^k(X_1)$ qui vérifie (i) $\cup$ (ii), vérifie aussi (i) $\cup$ (ii)'. Pour montrer la réciproque, on utilise une "technique de troncature par fonction ζ " qui sera fréquemment utilisée par la suite.

Si $\zeta \in \mathcal{O}^k(X_1)$ est égale à 1 dans un voisinage de l'origine, posons

$$\zeta_j(x) = \zeta(x/j) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots$$

Notons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout j , les fonctions ζ_j et $1 - \zeta_j$ sont des multiplicateurs dans $\mathcal{B}^k(X_1)$, de norme inférieure à C . Soit L un ensemble de formes linéaires vérifiant (i) $\cup$ (ii)'. Soit j tel que ζ_j vaut 1 sur K , et soit K' le support de ζ_j . Montrons que L vérifie (ii), et plus précisément :

$$(3.14.1) \quad \forall \varepsilon, \forall \eta, \forall \ell \in L, \forall \varphi \in B \quad \text{avec} \quad \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \eta, \\ \text{alors} \quad |\ell(\varphi)| \leq C(\varepsilon + \eta).$$

En effet, $|\ell(\varphi)| \leq |\ell(\zeta_j \varphi)| + |\ell(1 - \zeta_j)\varphi|$.

Comme $\|(1 - \zeta_j)\varphi\| < C$, et comme $(1 - \zeta_j)\varphi$ est nulle sur K , le deuxième terme est majoré par C_ε . Comme $\|\zeta_j \varphi\| \leq C$, le premier terme du second membre est majoré par $C\eta \rightarrow C\eta$. On a donc montré (3.14.1). Ceci entraîne (ii) si l'on choisit ε et η suffisamment petits. On a donc montré (c).

La topologie t^k est une S -limite inductive stricte car elle coïncide avec la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^k(X_1)$ qui coïncide avec t_K sur $B, 2B, 3B, \dots$; et (b) résulte de (1.7).

Il reste à montrer (a), c'est-à-dire que $\mathcal{B}^k(X)$ est l'ensemble des formes linéaires ℓ sur $\mathcal{B}^k(X)$ qui vérifient

$$\sup\{|\ell(\varphi)|, \varphi \in B\} < \infty,$$

$$\forall \varepsilon, \exists K, \varphi \in B, \varphi \text{ nulle sur } K \Rightarrow |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

(3.15) EXERCICE. - Image d'une distribution par une application de classe C^∞ : La notion de distribution bornée est très utile pour l'étude de cette image.

On considère deux ouverts $0 \subset \mathbb{R}^j$ et $U \subset \mathbb{R}^l$, et une application π de classe C^∞ de 0 dans U vérifiant l'hypothèse suivante :

(3.16) Pour tout compact K de U et pour tout $j \geq 0$, la norme de $D^j \pi$ est uniformément majorée sur $\pi^{-1}(K)$. Il en est par exemple ainsi si π est linéaire.

(3.17) Définition d'une application T -propre : Soit $T \in \mathcal{O}'(0)$. L'application π est dite T -propre si, pour tout compact K de U , la restriction de T à $\pi^{-1}(K)$ est une distribution bornée.

Ceci signifie également que, pour tout $\zeta \in \mathcal{O}(U)$, posant $\tilde{\zeta} = \zeta \circ \pi$, $\tilde{\zeta}T$ est

une distribution bornée sur 0 .

(3.18) Définition de $\pi(T)$ si π est T -propre et vérifie (3.16) : Pour toute φ dans $\mathcal{D}(U)$, on pose :

$$(\pi T, \varphi) = (T, \varphi \circ \pi).$$

On définit ainsi une distribution πT sur U dont la restriction à tout ouvert relativement compact de U est une distribution bornée.

(3.19) Propriétés de transitivité : Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et χ une application C^∞ de U dans V . On suppose que π et χ vérifient l'hypothèse (3.16). Il en est de même de $\chi \circ \pi$. Soit T une distribution sur 0 .

(a) En général, si π est T -propre et si χ est $\pi(T)$ -propre, $\chi \circ \pi$ n'est pas T -propre.

(b) Cependant si $\chi \circ \pi$ est T -propre, alors π est T -propre, χ est $\pi(T)$ -propre. De plus ;

$$\chi(\pi T) = (\chi \circ \pi)(T).$$

4. Mesures de Radon bornées sur l'e. l. c. s. réel X .

On munit $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}_{cyl}^0(X)$) de la norme

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

On note t_∞ (resp. t'_∞) la topologie correspondante. Soit B (resp. B') la boule unité fermée de $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}_{cyl}^0(X)$). Soit t_K (resp. t'_K) la topologie sur $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}_{cyl}^0(X)$) de la convergence uniforme sur les parties compactes de X . Soit t (resp. t') la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}_{cyl}^0(X)$) qui coïncide avec t_K sur B (resp. t'_K sur B').

(4.20) LEMME. - Le dual de $(\mathcal{B}_{cyl}^0(X), t')$ est l'ensemble des mesures de Radon sur X . Pour qu'un ensemble L de mesures de Radon sur X représente une partie équicontinue du dual de $(\mathcal{B}_{cyl}^0(X), t')$, il faut et il suffit que L vérifie les deux conditions suivantes :

$$(i) \sup\{|\ell(\varphi)|, \ell \in L, \varphi \in B\} < \infty$$

$$(ii) \forall \varepsilon, \exists \text{ compact } K \text{ de } X, \exists \eta > 0,$$

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B, \sup_{x \in K} |\varphi(x)| < \eta, |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

On peut remplacer (i) $\cup$ (ii) par (i) $\cup$ (ii)' avec

$$(ii)' \forall \varepsilon, \exists \text{ compact } K \text{ de } X,$$

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B, \varphi \text{ nulle sur } K, |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

Evoquons la démonstration : Comme t est la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^0(X)$ qui coïncide avec t_K sur $B, 2B \dots$, il en résulte que t est

une S -limite inductive stricte.

D'autre part $\mathcal{B}_{\text{cyl}}^0(X)$ est dense dans $(\mathcal{B}^0(X), t)$: ceci résulte de [2] (théorème 11), ou peut être démontré directement en appliquant convenablement le théorème de Stone-Weierstrass. Comme $(\mathcal{B}_{\text{cyl}}^0(X), t')$ est un sous-espace topologique de $(\mathcal{B}^0(X), t)$, ces deux espaces ont même dual, et vu [2] (théorème 1), ce dual est l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des mesures de Radon bornées sur X . La caractérisation (i) $\cup$ (ii) des parties équicontinues de $\mathcal{M}(X)$ résulte de la théorie des S -limites inductives. Pour montrer que (i) $\cup$ (ii) équivaut à (i) $\cup$ (ii)', on utilise la technique de troncature déjà évoquée, mais ici les fonctions ζ sont moins évidentes car X n'est pas forcément localement compact. On peut prendre

$$(4.20.1) \quad \zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\varphi(x)| \leq \eta \\ (4\eta^2 - |\varphi(x)|^2)/(3\eta^2) & \text{si } \eta \leq |\varphi(x)| \leq 2\eta \\ 0 & \text{si } |\varphi(x)| \geq 2\eta \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).
- [2] FREMLIN (D. H.), GARLING (D. J. H.) and HAYDON (R. G.). - Bounded measures on topological spaces, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 25, 1972, p. 115-136.
- [3] GARLING (D. J. H.). - A generalized form of inductive-limit topology for vector spaces, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 14, 1964, p. 1-28.
- [4] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - São Paulo, Sociedade de Matematica do São Paulo, 1958.
- [5] KRÉE (P.). - Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, "Linear operators and approximation, Proceedings of the conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, 1971", p. 159-174. - Basel und Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1972 (International Series of numerical Mathematics, 20).
- [6] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions. Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1966.

Paul KRÉE
 Tour Mexico, B. P. 1325
 65 rue du Javelot
 75645 PARIS CEDEX 13