Séminaire de philosophie et mathématiques

Joël Merker

L'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1996, fascicule 6
« L'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques », , p. 1-67
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1996___6_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Conférence Joël Merker E.N.S. Philosophie des Mathématiques

«L'ontologie explicite»
«des théorèmes d'existence en mathématiques»

18 Décembre 1996

Je voulais remercier Maurice LOI et l'assistance pour leur présence ce soir, les personnes que je connais, et je vais commencer en disant que le titre de cette intervention, «l'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques» peut surprendre. J'aurais pu choisir une autre formule, plus neutre, par exemple: «sur les théorèmes d'existence en mathématiques», mais elle ne correspondait pas à l'idée que je souhaite développer au cours de cette conférence.

Celle-ci se veut comme une analyse serrée des **dérivations ontologiques**, des **preuves d'existence**, telles qu'elles s'explicitent dans les mathématiques contemporaines. Le paradoxe de la notion d'explicite se dessinera au cours du troisième moment et on se demandera à cette occasion dans quelle mesure il est légitime de croire que les mathématiques tiennent ou constituent un discours **sur l'être**.

Dans un premier moment, nous allons considérer l'interrogation philosophique sur l'existence en général, dans un deuxième moment, nous allons faire une exposition et un rappel de la philosophie de Lautman, évoquer ce que Lautman appelle les **schémas de genèse**, et dans un troisième moment, nous allons envisager la question de l'existence en tant que telle, comme question d'existence *amorphe* pour des solutions d'une équation donnée.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
BIBLIOTHEQUE

Commençons par le **paradoxe de la notion d'être:**

La première chose que nous désirons savoir à propos d'un objet connaissable quelconque, c'est s'il existe ou non. Or, puisque le concept d'une chose réelle ne diffère en rien de cette même chose en tant que simplement possible, notre représentation du réel est congénitalement aveugle à l'existence. Tous nos concepts présentent un même caractère de **neutralité existentielle**. Quoi que contienne notre concept d'un objet, disait Kant, nous sommes toujours obligés d'en sortir pour lui attribuer l'existence. Mais ce qu'il y a ici d'étrange, c'est que ce soit vrai du concept d'être lui-même: il semble même complètement indifférent au concept dêtre que ce qui est soit ou ne soit pas. C'est cette ambiguïté fondamentale que j'appelle **le paradoxe de la notion d'être**, en m'inspirant des analyses d'Étienne Gilson.

Dans la langue française, être peut s'entendre soit comme verbe, soit comme un nom. Il y a une fonction existentielle du verbe être. S'il est vrai qu'un X soit un être, il s'en faut de beaucoup que X soit. En français, c'est le verbe exister qui s'est chargé du rôle d'assumer la fonction existentielle non propositionnelle. En revanche, en latin, *existere*, ou mieux, *ex-sistere* (en deux mots), est composé manifestement de *ex* et de *sistere*, de *sisto*, se placer, se tenir, se maintenir, et par conséquent, subsister. «Ex sistere» signifie, ainsi d'ailleurs que l'usage latin le plus courant l'atteste, moins le fait même d'être que son rapport à quelque origine. C'est pourquoi les sens les plus fréquents d'*existere* sont: paraître, se montrer, sortir de. Il est remarquable que les scolastiques, dont la langue philosophique est la source de la nôtre, aient si longtemps résisté à la **tentation de remplacer esse par existere**. Pour eux, *existere* signifie proprement **ex alio sistere**. De même que le mot *existentia* évoquait

d'abord à leur esprit *essentiam cum ordine originis*, *existere* désignait d'abord dans leur langue, l'acte par lequel un sujet accède à l'être en vertu de son origine. Un tel sujet subsiste donc, mais à partir d'un autre: *ex alio sistere, hoc est substantialiter ex aliquo esse.* La notion d'origine est donc en principe connotée à chaque fois que l'on emploie ce terme dans son sens précis. On sait qu'il n'en est pas ainsi dans la langue philosophique du dix-septième siècle. Dans la Métaphysique de Scipion Du Pleix, notamment, on parle de l'existence comme la nue entité, le *simple et nu être des choses.* Pour lui comme pour Descartes, *existentia* s'est déjà spécialisé dans la signification du pur fait d'être. Manifestement, le titre de la troisième méditation est caractéristique à cet égard, «de Dieu, qu'il existe». Ici exister veut dire être.

Ce **glissement de sens**, qui transforme *existere* en simple substitut d'*esse* s'explique assez aisément. Dans l'expérience sensible, l'existence signifie le seul mode d'être dont nous ayons l'expérience et c'est pourquoi, de tous les êtres appréhendés par nous, il est correct de dire qu'ils *existent* pour signifier qu'ils sont. Pourtant, si la métaphysique devait s'exprimer dans une langue technique faite à la mesure de nos concepts, elle dirait ici de chaque étant qu'il est par suite de son existence, au lieu de dire qu'il existe pour signifier qu'il est. Ces **confusions** entre être et exister, nous allons les voir se développer dans les problématiques philosophiques concernant le statut des idéalités mathématiques.

L'essence.

Lorsque nous parlons absolument de l'essence, ce n'est pas à l'être que nous pensons, mais à ce qui fait qu'une chose est ce qu'elle est. C'est là, dit-on, *l'essence de la chose.* Alors tout se passe comme si l'intellect cherchait dans l'*essentia*

le moyen de dissocier l'être du fait même qu'il existe, car si l'essence de la chose est vraiment ce qu'il y a en elle d'essentiel, il est remarquable que cette essence reste la même, que la chose existe, ou n'existe pas. On aperçoit déjà les amphibologies dont souffre le langage dont use inévitablement toute métaphysique de l'être. Ce sont précisément certaines attitudes fondamentales de la philosophie que nous nous proposerons d'examiner. Et nous allons essentiellement examiner l'argument ontologique de Descartes, non pour réfuter les preuves de l'existence de Dieu, mais pour discerner les **embarras** dont elles **souffrent**. Il doit donc y avoir dans l'être quelque chose de trop visible pour que le reste soit aisément perçu.

La critique par Leibniz de l'argument ontologique de Descartes.

Nous allons passer un certain temps à analyser cette critique, à analyser ensuite une critique de cette critique pour en reverser les acquis sur des questions de philosophie des mathématiques.

Des diverses critiques dirigées par Leibniz, contre la philosophie de Descartes, l'une des plus connues est celle qu'il a faite de la célèbre preuve de l'existence de Dieu. Cette critique s'articule de la manière suivante: la preuve, bien qu'excellente aux yeux de Leibniz, souffrirait d'un défaut radical: pour que Dieu soit possible, puis existe, il faudrait d'abord vérifier que l'idée de Dieu, prise en elle même, n'enveloppe aucune contradiction.

1) En effet, c'est la première condition pour que, de l'idée d'un être souverainement parfait, on puisse déduire légitimement qu'il existe. En d'autres termes - **contre la clarté comme critère** –, Leibniz critique le préjugé favorable tiré de l'apparente clarté de la notion du parfait. «Celle-ci ne saurait suffire», dit-il. Et il

oppose directement des exemples de notions très claires et pourtant contradictoires, comme le plus grand de tous les cercles, ou le mouvement de la dernière vitesse.

2) **Défense d'une condition nécessaire.** Il fallait apporter une preuve en règle de la possibilité de Dieu. Or, Descartes, abusé par le critère insuffisant de la clarté de nos idées, a commis la faute logique de ne pas s'en soucier.

3) L'accusation de sophisme – selon Leibniz lui-même – est tout de même injustifiée. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'il faut corriger la preuve, puisqu'elle est imparfaite.

Faisons une parenthèse, une remarque. C'est sur ce point précis que s'enracinent les profondes oppositions qui sont à l'origine des querelles entre l'école formaliste hilbertienne et les intuitionnistes. Elles ont, dans un certain sens, tourné autour de la définition absolue et **critérante** pour l'existence des idéalités mathématiques. Pour les formalistes, **en réponse à une exigence interne envisagée comme l'absolu critère par soi de la vérité**, l'existence est identifiée à la non contradiction. Pour les intuitionnistes, au contraire, on pose l'insuffisance en tant que telle de ce critère. La condition est nécessaire, bien évidemment, mais elle n'est pas suffisante.

Analysons de manière un peu plus serrée l'**option** formaliste et la **réponse à l'exigence** que l'option formaliste **se propose** de produire.

Si l'interlocuteur privilégié de l'être est le symbole, si les systèmes formels, une fois posée leur structure axiomatique, deviennent en eux-mêmes un objet d'étude, avec une morphologie propre, alors, dans une perspective métathéorique, on est en droit et une fois de plus tenté de leur attribuer une existence complètement **dessaisie** des principes d'origine. Que la contradiction implique la non existence, c'est une

exigence qui va de soi. Inversement, si l'on peut, d'après Hilbert, démontrer que les attributs conférés à une notion ne peuvent jamais, par l'application d'un nombre fini de réductions logiques, conduire à une contradiction, «je», dis Hilbert, dirai que l'on a ainsi démontré **l'existence mathématique** de la notion en question. Ceci appelle deux commentaires.

1) Il ne s'agit nullement d'un théorème mathématique d'existence, mais il est question d'un **principe non philosophique**, et il faudrait ajouter: **non mathématique**, d'accession à l'existence. C'est d'une certaine façon un **principe méta-mathématique non précisé**. Non précisé, car encore relatif. Le système axiomatique de référence peut en droit et en fait varier. Il n'est pas question d'engendrer une multitude de systèmes axiomatiques sans lien unificateur, et de définir l'existence mathématique en la spécifiant en fonction du domaine dans lequel elle se dévoilerait. Mais **l'interrogation** porte bien en effet, à l'horizon, sur la **constitution** d'un système mathématique **réduit** aux principes minimalement nécessaires, et l'existence toute mathématique prendrait tout simplement place au sein de ce tout, aisément scrutable et non contradictoire, à la manière d'une brique supplémentaire dans l'édifice. Toute notion existe mathématiquement, du moment qu'elle est non contradictoire.

2) **L'existence mathématique, comme dérivé non ontologique du système formel.** Cette charge d'accession à l'être est **reportée** sur la position antécédente d'un système formel, pour être simultanément et dans le même ordre de pensée, **déportée** et déchargée de sa position et de sa prétention à l'être. Le système lui-même est soumis au même critère: l'existence équivaut à la non contradiction.

On a position et positivité de l'axiomatisme, **dessaisissement de la problématique de l'existence**, puisqu'on a identification de l'existence avec la consistance, objectivation dans le formel étudiable comme tel. La condition nécessaire pour le possible s'érige en critère. Seule l'arithmétique est à examiner: la consistance des mathématiques tout entières s'y ramène, et cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant.

Cette exigence de dessaisissement constitue ce que nous appelerons une **autonomie dessaisie de tout critère** pour l'existence.

Revenons aux intuitionnistes. Ainsi, nous avons retrouvé une application particulière du principe leibnizien «*l'essence est la raison suffisante de l'existence*», ou «*la possibilité de l'essence implique son existence*». Les intuitionnistes ou les constructivistes sont en général d'un autre avis. Ils refusent la résorption de l'existence dans l'essence – mais pour quelle raison exactement?

Les intuitionnistes **maintiennent** qu'il faut un **acte** pour passer de l'essence à l'existence.

Cet acte, qui a été thématisé par St Thomas, cet acte qui a été thématisé par Hegel, est chez eux ce qu'ils appellent l'**intuition** ou la **construction**. Ils supposent de plus un sujet de conscience, une liberté, un arbitraire apparent. L'acte chez Platon peut être identifié à l'idée du Bien producteur de l'être. L'acte chez St Thomas D'Aquin est divisé en deux actes. Le premier acte est le suivant: la forme est cause constitutive de la substance. Le deuxième acte ajoute à ce premier acte un acte qui fait que la substance existe. Et l'acte que je vais essayer de considérer et dont je vais essayer de formuler la structure est cet acte que j'appelle la **naissance des synthèses**.

Dans l'intuitionnisme brouwerien, la cause efficace des entités mathématiques est le mathématicien. On pourra diviser les deux critères, formaliste et intuitionniste, en parlant d'**existence logique** pour le critère qui ne relève que du principe de non contradiction, en terme imagé, d'un «germe d'existence». Au contraire, du point de vue constructiviste ou intuitionniste modéré, on accorde que la contradiction est preuve de non existence, mais il faut reconnaître que **le principe de contradiction empêche sans qu'il ait aucun pouvoir d'engendrement.**

Je ferme la parenthèse sur la liaison entre la philosophie de Leibniz et la tentation formaliste d'identifier, pour se dessaisir du problème philosophique, l'existence à la non contradiction, et je reviens à la critique de la preuve ontologique cartésienne.

La preuve ontologique cartésienne.

Leibniz critique la mineure. Il dit que cette mineure, qui s'énonce de la façon suivante: «l'être dont j'ai l'idée est l'être tout parfait, c'est-à-dire un être dont la nature enveloppe toutes les perfections.» Leibniz demande la preuve de la mineure et la déclare impossible. Il faut renoncer à saisir aucun lien d'identité, aucun lien analytique entre l'être et le parfait. De l'idée que nous avons de toute la perfection, nous ne saurions tirer ce qu'elle ne contient pas, à savoir l'existence. Selon Leibniz, cette notion de parfait est donc inutile, elle rend de plus précaire la preuve cartésienne. L'idée de perfection dans la pensée de Descartes n'avait d'autre but que de nous faire saisir une liaison indissoluble dans la nature de Dieu entre son essence et son existence. Omettons donc l'idée de perfection, inutile à la preuve, et raisonnons de la manière suivante:

Ens de cujus essentia est existentia necessario existit

Deus est ens de cujus essentia est existentia

Ergo Deus necessario existit.

Est-ce à Leibniz que revient l'honneur d'avoir remarqué la nature synthétique qui affirme l'existence de l'être tout parfait? À quoi tend tout l'effort de Leibniz? Non, à coup sûr, à concentrer la preuve dans cette première synthèse, mais au contraire à l'en débarrasser comme d'un élément qui ne fait qu'en ruiner la force démonstrative. **Sa correction: substituer à l'être parfait, l'être par soi, l'ens per se, n'a d'autre effet que de rendre analytique au suprême degré l'argument cartésien et d'en faire disparaître, du moins en apparence, toute trace de synthèse.**

Selon Leibniz, le passage de l'essence à l'existence s'effectue de lui-même, pourvu que l'on établisse la non contradiction de l'idée de l'être par soi. Pour prouver que Dieu existe, c'est assez de démontrer seulement qu'il est possible. Comme dit Leibniz, nous disposons ici de l'unique modale qui jouisse du privilège d'atteindre l'existence. La parfaite convenance logique de la notion du triangle n'entraîne pas qu'il existe, ni qu'il soit possible qu'il existe en fait un triangle conforme à la définition géométrique.

Mais revenons à Leibniz. Selon Leibniz, le vrai logique **exprime par l'avance** toute la réalité de l'être, en même temps qu'il la fonde et la rend possible. À la réalité de l'essence, l'existence n'ajoute rien qui se puisse définir.

Cette critique de la preuve ontologique cartésienne peut être critiquée en suivant Hannequin en deux moments. Le premier moment va faire la distinction entre la possibilité logique et la possibilité réelle. Avec Hannequin, on va se demander s'il

est juste d'accuser Descartes de s'être soustrait au devoir de prouver la possibilité de Dieu, voir même de l'avoir complètement méconnu.

J'écourterai le premier moment et je me contenterai de dire qu'il faut poser qu'il y a une distinction entre les définitions nominales et les définitions réelles. Distinction qui a d'ailleurs été introduite par Leibniz. Nous avons deux sortes de notions. Celles qui ont un objet dans une essence réelle, dans un intelligible, dans une vérité, et qui sont vraies par là même. Et celles qui, au contraire, n'ayant pas un tel objet, dépendent en quelque façon, sinon tout à fait, de l'arbitraire de l'esprit. **Ainsi, toute la question est de pouvoir déterminer si, à ce que nous appelons une idée de notre esprit, correspond en quelque façon une essence réelle qui en assure à la fois la consistance et l'existence.** Ceci nous rapproche de la critique de Kant. Selon Kant, l'être n'est pas un prédicat réel: «Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles, car sinon, mon concept n'exprimerait plus l'objet tout entier, et par conséquent, il n'y serait plus conforme.» Si vous ne posez que l'idée, tout prédicat de l'idée, fût-ce l'existence, n'appartient qu'à l'idée, mais nullement à la chose, et alors l'attribution en devient manifestement une tautologie. En même temps que l'idée, il faut donc poser l'être que représente l'idée.

La thèse de Kant sur l'être est une thèse de position de l'être.

J'y reviendrai. Je répète: la thèse de Kant sur l'être, et cela je l'emprunte à Heidegger, est une thèse de position de l'être.

Je passe au deuxième moment de la critique de la critique de Leibniz, qui s'enracine dans le lien démonstratif et exhibe nettement la nature synthétique de la preuve

ontologique. Si Dieu est possible, reste à prouver qu'il l'est réellement. Leibniz ne croit pas utile ce supplément de preuve. D'ailleurs, oui, il est superflu, si l'on part de la définition de Dieu comme «l'être par soi», ou encore «l'être nécessaire.» Mais Descartes, en partant de la définition de Dieu conçu comme tout parfait, assumait deux charges:

1) celle d'établir qu'il est possible que l'idée que nous en avons n'est pas une pure idée mais enveloppe une essence,

2) et celle de montrer que par un privilège unique, cette essence enveloppe au surplus l'existence.

Vers le dévoilement des synthèses.

Je l'ai dit à l'instant: ce qui fait que la chose est ce qu'elle est est indépendant de son existence ou de sa non existence. C'est donc ce qui est de l'ordre du concept par opposition à ce qui est de l'ordre du donné, du sensible, ou de l'existence. Je rappelle qu'il y a une opposition dans le discours que je tiens, une opposition capitale et réelle entre l'être et la pensée, entre l'être et le concept, opposition qui est au fondement de toute la philosophie de Heidegger, et ici, ce que j'essaie de faire, c'est de m'amener progressivement vers le **dévoilement des synthèses** dans les preuves d'existence, et d'éviter de les rendre analytiques. Mais je vais terminer sur Descartes, parce que quelque chose va considérablement s'éclaircir à ce sujet, et ensuite, je pourrai enclencher sur la philosophie de Lautman et interroger véritablement ce qu'il en est des synthèses au niveau de la mathématique. Puisque le titre de cet exposé nous engage à parler des théorèmes d'existence en mathématiques, donc des preuves d'énoncés qui dérivent de certaines données, donc des liens synthétiques qui nous

font accéder au synthétisé, nous devons analyser conceptuellement ce qu'il en est de cette existence mathématique synthétisée.

D'où vient que Leibniz se croyait en état de se passer de ce second moment? En dépit de l'apparence, il n'y a pas identité entre l'être par soi et Dieu, qui n'est pour nous que l'être tout parfait. L'être de Dieu n'existe qu'autant qu'il a la force d'exister par soi, autrement dit, d'être *causa sui*, et cette force, seule sa richesse infinie, son absolue perfection, selon Descartes, peut en rendre compte. Par conséquent, c'est la perfection seule qui peut donner à l'être nécessaire la **force d'exister par soi**. Ce n'était donc pas assez de prouver la possibilité de Dieu, il fallait en outre établir la liaison indissoluble dans sa nature de l'existence et de la perfection. Leibniz, en corrigeant le syllogisme cartésien, a pu croire identifiables l'être nécessaire et l'être parfait. Quand on raisonne ainsi que Leibniz, le nerf de l'argument semble résider dans l'identité, au sens logique du mot, de l'existence et de la perfection. Mais il faut reconnaître que c'est Leibniz qui, le premier, non seulement a contesté cette mineure, mais a découvert le motif véritable qui la rend contestable. L'existence, en effet, il est vrai, ne saurait passer pour une perfection. Je rappelle la critique de Kant: «Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles, car sinon, mon concept n'exprimerait plus l'objet tout entier, et par conséquent, il n'y serait plus conforme.» Donc, ou bien le lien est nul entre la perfection et l'existence, ou, s'il est très réel, et s'il n'est point analytique, il reste à reconnaître qu'il est synthétique, et à le justifier. On pourrait aussi faire un rappel sur la théorie des possibles chez Leibniz, qui s'organise autour d'une **tendance à être**, et il n'est pas étonnant dans ces conditions que Leibniz ait fait converger ses efforts pour mettre

cette synthèse hors de l'argument.

Mais je reviens à Descartes. La nature de ce lien, qui est un lien synthétique de convenance ou de raison, Descartes l'aurait-il méconnue? Et bien, nous allons essayer de nous en tenir à la conclusion que, pour Descartes, comme pour Leibniz, l'attribution de l'existence à l'être tout parfait ne se fait point en vertu du principe d'identité, mais en vertu du principe de raison suffisante, et le jugement qu'il affirme n'est point analytique, **il est nettement et franchement synthétique**.

La vérification du fait que le lien est non analytique est presque tout immédiate. Comme le dit Descartes, dans l'idée ou le concept de chaque chose, l'existence est contenue, parce que nous ne pouvons rien concevoir sous la forme d'une chose qui n'existe pas. Une opposition forte entre le concevoir, le concept, et l'existence, une inconcevabilité de l'existence, qui, comme nous le rappelions, mine Heidegger philosophe au travail. Mais avec cette différence que dans le concept d'une chose limitée, l'existence possible et contingente est seulement contenue, et dans le concept d'un être souverainement parfait, la parfaite et nécessaire y est comprise.

Résumons ces deux moments. Deux jugements réellement synthétiques doivent être maintenus dans la preuve de l'existence de Dieu. Pour que cette preuve soit une démonstration, il faut que je puisse affirmer deux rapports. D'une part, celui de l'existence et de l'idée, d'autre part, celui de l'essence et de l'existence. Et ces deux rapports enveloppent chacun une synthèse irréductible. La faute de Leibniz vient donc d'une intention formelle d'améliorer l'argument, non en lui restituant les formes synthétiques sans lesquelles il n'a plus de portée, mais en les excluant.

La philosophie de Descartes, il faut le rappeler, est une **philosophie synthé-**

tique. Elle l'est pour deux raisons. **Parce qu'elle fut inspirée par les mathématiques**, et surtout, **parce qu'elle est une philosophie de la volonté.** Sous les marques de la synthèse, le possible ne se révèle à nous que par l'action et sous l'aspect des lois de la volonté. L'absolue volonté ne trouve pas en elle d'absolue vérité, elle **crée**, sans s'y subordonner, les relations logiques en posant des synthèses qui soutiennent l'analyse, et ces dernières donnent à la logique et à la vérité leur contenu réel et leur fondement premier. **Les formes de la synthèse, les marques de la synthèse, ne sont reconnaissables qu'une fois parcouru le chemin qui sépare les hypothèses insuffisamment dessinées de la conclusion révélée sous l'aspect des lois de la volonté.**

Cette seule phrase pourrait nous mettre en communication avec avec la lune cachée de l'oeuvre de Cavaillès.

L'élément clé dans une preuve d'existence réside dans la naissance des synthèses. C'est ce que nous allons voir à l'oeuvre, analysé et interprété au contact des mathématiques contemporaines, notamment celles où se jouent de véritables **questions d'existence**, et nous insisterons sur le terme **questions, véritables en ce qu'elles ne sont reconnaissables et corrélatives que de la constitution de synthèses démonstratives et irréductibles.** Elles sont d'un aspect forcément plus complexe que les preuves de l'existence qu'ont produites jusqu'à nos jours les métaphysiciens.

Schémas de genèse.

Pour commencer à caractériser ces schémas de synthèse, autrement dit, les schémas de genèse, je vais faire un exposé de la philosophie de Lautman. Un bref rappel, disons, allant à l'essentiel de ce qui a travaillé Lautman.

Nous allons donc partir d'un exemple mathématique traité par Lautman. Ajoutons d'emblée que nous nous démarquerons des réserves philosophiques usuelles concernant la puissance d'engendrement des idées dialectiques lautmanniennes: pour restituer l'évocation fondamentale des réalisations mathématiciennes, le philosophie hésite, choisit, propose. Sa solution n'occulte en rien le rapport universel des mathématiques à un réel prétexté auquel elles confèrent l'expression.

Chez Lautman, il y a une dialectique des idées qui est **ontologiquement constituante**. Le rapport entre les idées et les théories qu'elles réalisent est un rapport qui est analogue au rapport entre l'ontologie et l'ontique chez Heidegger. La philosophie transcendantale de Jean Petitot pose que l'ontologie est identifiable à la constitution d'objectivité mathématique ou d'objectivité physico-mathématique.

Chez Lautman, on trouve majoritairement une philosophie des problèmes. Philosophie méconnaissable, par conséquent, refoulée, ignorée, travaillée elle-même par un faisceau de questions muettes qui l'inscrivent d'emblée dans une relation ambiguë avec la tradition critique. Avant d'être génératrices, les idées dialectiques sont purement problématiques, donc incomplètes. Il y a une intuition extra-mathématique de l'urgence d'un problème. Le projet philosophique général de Lautman est de **retrouver** au sein d'une théorie mathématique **le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence de cette théorie.** Les idées problématiques s'incarnent et passent sous la forme de théories réalisées, de la même façon que l'essence passe dans l'existence. Lautman le dit explicitement. Je rappelle la difficulté philosophique qu'ont rencontrée tous les métaphysiciens pour *penser* ce passage impensable de l'essence à l'existence. Mais Lautman le pose comme un pas-

sage qui ne pose pas véritablement de problème. (Au fond, toutes les critiques de la philosophie de Lautman se résument à une réexpression des réserves que l'histoire de la philosophie a pu émettre à l'encontre de l'ontologisation (Platon) ou de la propositionnalisation (Aristote) des questions socratiques.) Pour Lautman, ce passage est redevable de la **compréhension**, laquelle devient la source de la **genèse** des théories réelles. Il y a d'une certaine façon incarnation des idées dans des théories. Lautman effectue d'ailleurs des rapprochements avec la différence heideggerienne entre l'étant et l'être. Par après, il y a **transformation de la compréhension en genèse. Transformation et articulation entre la transcendance des idées et l'immanence de la structure logique de la solution d'un problème mathématique donné.** Ce lien, la possibilité de l'articulation, c'est la genèse qui nous le donne. Citons Lautman: «*l'antériorité de la dialectique est celle du souci ou de la question*» (ce que nous traduisons maintenant dans l'oeuvre de Heidegger en français par le *digne-de-question*) «*par rapport à la réponse*». «Il s'agit d'une antériorité ontologique, pour reprendre l'expression de Heidegger, exactement comparable à celle de l'intention par rapport au dessein. Le philosophe n'a ni à dégager des lois, ni à prévoir une évolution future, son rôle consiste seulement à prendre conscience du drame logique qui se joue au sein des théories. Le seul élément a priori que nous concevions est donné dans l'expérience de cette urgence des problèmes antérieurs à la découverte de leurs solutions.»

Les théorèmes d'existence vus par Albert Lautman.

Cette genèse des genres de l'être, Lautman l'illustre de manière explicite: l'intention de Lautman est de montrer que l'achèvement d'un être s'affirme dans son

pouvoir créateur. Cette thèse implique deux aspects réciproques: le premier aspect est celui de l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle crée. Ce premier aspect s'enracine dans les systèmes logiques constitués et Lautman l'analyse à part entière. Le deuxième aspect est le suivant: l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine. Cet aspect est le plus intimement relié aux théories mathématiques standard. Mais les schémas de genèse décrits par Lautman abandonnent l'idée trop simpliste de domaines concrets et d'opérations abstraites. En effet, cette conception fixiste tendrait à stabiliser les êtres mathématiques dans un rôle immuable, elle ne rendrait pas compte du mouvement de *thématisation*, au sens où l'entend Cavaillès. Par conséquent, ce n'est qu'au sein d'un problème déterminé que l'on peut assigner des fonctions distinctes à des genres de l'être différents. Comme exemple de domaine privilégié de l'existence, Lautman aborde la théorie des fonctions algébriques de Riemann, la théorie du corps de classes de Hilbert et la théorie de la représentation des groupes de Weyl, les deux dernières représentant des théories relativement récentes à l'époque de la thèse de Lautman.

Expliquons le deuxième rapport, qui est, comme je l'ai dit: l'essence d'une matière faisant naître des formes que sa structure dessine. Et je présente le schème général: c'est un cas où la structure d'un domaine, je dis bien la *structure*, est immédiatement interprétable en termes d'existence pour certaines fonctions définies sur ce domaine. Il pose la thèse suivante: la structure préforme l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que ces structures définissent. Soit une fonction algébrique d'une variable, à laquelle Riemann a été d'une certaine façon contraint à associer un objet radicalement nouveau, que nous appelons aujourd'hui la «surface de Rie-

mann» de la fonction, et qui est constituée d'un certain nombre de feuillets soudés en croix le long de certaines coupures. Par déformation, on peut se ramener à un disque à deux faces percé de p trous, bref, topologiquement un tore à p trous, et on note S cette surface de Riemann, sur laquelle il y a $2p$ rétrosections.

Le problème du rapport de la structure à l'existence est issu d'un **problème inverse** qui a été posé et résolu par Riemann. Nous pourrions digresser interminablement sur les potentialités inavouables de l'**inversion** comme éveil de la problématicité mathématique. Laissons-les s'exprimer librement ici. Riemann se donne une surface arbitraire et se pose la question de savoir s'il existe une fonction algébrique dont cette surface soit la «surface de Riemann.» Insistons sur la question spécifique de Riemann: étant donné la condition d'apparence d'un être, savoir, en dessaisissant cet être de ses conditions d'origine, si ce que l'on a construit à partir de ces données effectue le lien complet et satisfaisant avec la structure décisive que l'on a pu poser **a posteriori**. C'est l'aspect qui, je crois, a travaillé la lecture cavaillèssienne de la théorie cantorienne des ensembles. Toute l'analyse que le philosophe des mathématiques a eu le bonheur d'écrire dans sa deuxième thèse a consisté à mettre en lumière le fait

1) d'une part qu'il y a une différence de potentiel entre les conditions suffisantes pour l'expression en termes de séries trigonométriques de certaines classes de fonctions et celles qui seraient nécessaires mais qui naviguent encore dans l'ombre,

2) d'autre part, que par un hasard mystérieux, par un effet de clôture imprévisible, ce hiatus s'incarne parfois dans la position de domaines d'existence prétextée ou dans des caractérisations entièrement satisfaisantes.

Son analyse vise a essayer de comprendre philosophiquement comment Riemann, comment Dedekind, comment Lebesgue sont parvenus à faire disparaître cette différence de potentiel entre des faisceaux de conditions insuffisamment dessinées, sur quelques problèmes précis, dont la nature, sans que rien ne puisse le laisser prévoir a priori, invitait à une «clôturation», problèmes qui, enfin, restent déposés dans la tradition comme autant de **synthèses irréprochables** sur le plan de la pensée mathématique pure. La théorie des fonctions algébriques s'inscrit donc encore dans cette philosophie des mathématiques conceptuelles.

Le théorème de Riemann consiste à faire naître de la structure topologique un nombre déterminé d'intégrales abéliennes de première espèce. Le théorème énonce: *le nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes est égal au genre g de la surface* ($g = p$). La structure topologique induit donc l'apparition d'intégrales abéliennes partout définies sur la surface. L'argument consiste à faire une rétrosection sur la surface. Il y a de manière sous-jacente un théorème crucial d'existence pour une fonction potentielle à pôle logarithmique fixé. Et il y a une version topologique qui permet d'en rendre compte. La rétrosection est un acte topologique – naturel et irréprochable. Je découpe la surface de telle façon que le morceau qui reste soit simplement connexe, et à ce moment-là, je peux définir partout une intégrale abélienne. Ainsi, comme annoncé, il y a une **liaison**, sur le plan des **virtualités de désignation et de découpe gestuelles**, entre la structure topologique de la surface et l'existence de l'intégrale abélienne définie partout sur la surface.

Lautman l'analyse de la façon suivante: il dit qu'on voit dans cette théorie l'im-

SCHÉMAS DE GENÉSE

émerge (structure):

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE ÉMERGE DE LA
DÉCOMPOSITION STRUCTURALE
D'UN DOMAINE DE BASE

découle (mixte):

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE DÉCOULE DE LA
CONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE
QUI LE CONTIENT AVANT MÊME QU'ON SACHE L'Y VOIR

résulte (extremum):

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE RÉSULTE DE LA SÉLECTION
D'UN ÉLÉMENT
DISTINGUÉ PAR SES PROPRIÉTÉS EXCEPTIONNELLES

portance du découpage canonique de la surface. La surface brute ne laisse rien apparaître sur elle. Par contre, la structure topologique simplifiée qu'elle reçoit de ses rétrosections possibles la rend apte à une **création fonctionnelle.** Le **moment précis de la genèse** réside dans l'**acte** par lequel on confère à la structure une **double interprétation**: d'abord rendre la surface simplement connexe, ensuite en repérant les sauts de certaines expressions fonctionnelles. Ces dernières répartissent à l'avance ces intégrales sur la surface. La thèse est la suivante: **le passage à l'existence** devient ainsi et plus généralement aussi, une liaison, une synthèse peut-être, ou plutôt, qu'en sais-je?, une réflexion, un basculement, une trappe?, mais au moins, Lautman dit: **une liaison entre la décomposition structurale d'un être et l'existence d'autres êtres que cette décomposition fait naître.**

Je pense que cette liaison est ce qu'il y a de moins clair possible. **C'est la liaison qui est elle-même en question, c'est la liaison qui mérite d'être interrogée.** On peut et on doit aussi l'envisager comme une **traduction** fonctionnelle d'une structure topologique dans une structure algébrique ou dans une structure analytique. Alors finalement, et pour finir, oui, ce passage à l'existence pourrait **aussi** être analysé comme un passage qui n'est pas vraiment un passage à l'existence, car au fond, peut-être bien que chaque chose «désexiste» aussi facilement qu'elle a existé, mais que ce *quid passagium* est plus fondamentalement quelque chose qui est **travaillé** par la **nécessité** de **poser des conditions**, nécessaires, suffisantes, ou de caractérisation. Je reviendrai sur cette suggestion. La naissance des genres de l'être à partir des domaines d'existence chez Lautman pourrait fort bien échouer ici dans son intention de caractériser complètement cette liaison comme révélatrice

Bilan «en questions» de la présentation de Lautman.

LA LIAISON INTERROGÉE

Décomposition structurale

↓

Existence d'autres êtres mathématiques

Questions problémato-logiques

Faut-il attendre un resserrement de conditions équivalentes pour dominer complètement la liaison?
Le passage est-il corrélatif de l'actualisation d'une rigueur?
Dans quelle mesure l'imitation [fonctionnelle p. ex.] d'une propriété [topologique, p. ex.] constitue-t-elle, au sens propre, une démonstration *d'existence*?

Questions d'émergence

Y a-t-il une clause intuitive constituante?
Jaillissement à partir d'une structure qui capte les êtres à l'avance?
Prégnance générale d'un imprévisible?

Comparaison des **schémas de genèse** lautmaniens avec les «**schémas explicites de dérivation d'existence**» tels qu'ils se dessinent dans [quelques domaines] de la mathématique contemporaine.

Thèse. Il y a [par exemple pour le problème de Dirichlet, pour le théorème de Cauchy Kowalewskaïa, pour les estimées de Schauder, les estimées de Hörmander, pour les théorèmes d'existence de Gromov] un PASSAGE À L'EXPLICITE qui est: (1) radical, (2) restrictif, (3) assimilable à une «*prise de conscience de l'ordre du concept.*»

ou démonstrative d'existence. Non pas seulement pour les raisons de philosophie qui se rallient à la théorie de l'intention rationnelle que nous venons d'évoquer plus haut, mais parce que cette liaison vit comme un château suspendu, nul ne sait à quoi, sur l'océan!, comme les diagrammes que voici.

Les schémas de genèse de Lautman.

Il en distingue essentiellement trois. L'existence d'un être émerge de la décomposition structurale d'un domaine de base, c'est la thèse que je viens d'énoncer. Ici, la structure préforme l'existence. Le deuxième schéma de genèse qu'il distingue est un **mixte**: l'existence d'un être découle de la constitution d'un ensemble qu'il contient avant même qu'on sache l'y voir. Ce schéma de genèse est explicitement relié à la naissance des espaces de Hilbert, en relation avec les travaux de Hilbert pour résoudre les **équations intégrales** à l'aide des méthodes L^2. Dans cet ordre d'idées, l'existence d'un être résulte de la **sélection** d'un élément distingué par ses propriétés **exceptionnelles**. L'extremum détermine ici l'existant.

Revenons sur cette **liaison**. J'annonce que je vais faire un bilan **en questions** de la présentation de Lautman. La liaison en fait, ne situe que le fondement de ce qui se passe dans les mathématiques, la chose que l'on ne parvient pas à thématiser, l'incompréhensible. Cette liaison entre la décomposition structurale et l'existence d'autres êtres mathématiques doit être interrogée selon deux veines qui se divisent selon la relation qu'elles entretiennent avec la dialectique de l'*a priori* et de l'*a posteriori*. Il y a une première veine, qui rassemble les **questions d'émergence**. Ces questions sont reliées aux travaux de Gilles Châtelet et à la philosophie des semi-intuitionnistes français, c'est la question de savoir s'il y a une clause intui-

tive constituante, si l'on peut parler d'un **jaillissement** à partir d'une structure qui **capte** les êtres à l'avance, ou prégnance générale d'un **imprévisible**. Savoir si l'on peut parler de constitution de cette liaison à travers et par un **geste**, ou une **découpe**. Un deuxième ordre de questions, qu'on dira d'inspiration rationaliste, je dirai même plus, **problématologique**, en référence à la philosophie de Michel Meyer, et qui sont les suivantes: faut-il attendre un resserrement des conditions équivalentes pour dominer complètement la liaison, c'est-à-dire attendre de savoir que, à une structure topologique donnée correspond exactement un espace d'intégrales abéliennes de première espèce, et que cette liaison soit dominée complètement et que l'on sache qu'il n'y a aucun intervalle qui sépare l'existence des intégrales abéliennes et la structure topologique, donc une correspondance entièrement satisfaisante entre deux visions mathématiques. J'évoque une autre question: le passage est-il corrélatif de l'actualisation d'une rigueur? C'est une question qui est complètement insoluble, je pense. D'ailleurs, l'entreprise de ce qu'on appelle aujourd'hui l'*histoire des mathématiques* navigue et se débat avec et dans cette question. Dans quelle mesure l'imitation fonctionnelle d'une propriété topologique constitue-t-elle **au sens propre une preuve d'existence?** Cela aussi, à mon sens, c'est une question importante, dirimante.

Dans ce qui va suivre, je vais donc me proposer comme but de comparer les schémas de genèse lautmaniens avec les **schémas explicites de dérivation d'existence**, tels qu'ils se dessinent dans la mathématique contemporaine. Et ce que je vais dire, c'est qu'il y a un **passage à l'explicite** – je vais essayer de l'illustrer sans le théoriser véritablement – qui est radical, restrictif, nécessaire, par exemple pour

LA QUESTION DE L'EXISTENCE MATHÉMATIQUE
(*Général*)

au total, il y a deux sens du mot [i.e. de la question]

«EXISTER», appliqué aux objets mathématiques

Sens intra-théorique: défini à l'intérieur d'une théorie, il s'applique aux objets de cette théorie.
Les questions sont de l'ordre: existe-t-il un point, un nombre, une fonction, une clôture, un espace, un revêtement, tq (C). [parmi les «objets» de la théorie.]

Sens métathéorique: ce sens se ramène à une possibilité de définitions en liaison avec des théories antérieures. Les questions sont de l'ordre:
existe-t-il des géométries non euclidiennes? existe-t-il x tel que $x^2 = -1$?
Et signifient: Peut-on adjoindre?
Peut-on introduire par des postulats nouveaux un «X»?
La pensée de cette *liaison* est redevable d'une philosophie du possible (*Sur les problématiques implicitées par elles-mêmes*).

Thèse. Le sens intra-théorique ou «dérivatif» de l'existence d'entités mathématiques est irréductible à la notion de possible.

Première gradation à l'explicite.

des théorèmes comme ceux issus du problème de Dirichlet, le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Kowalewskaïa, les estimées de Schauder, les opérateurs elliptiques, les théorèmes d'existence dus à Hörmander, ou un théorème géométrique d'existence avec création d'homologie dû à Gromov.

Il y a un passage à l'explicite qui est radical, restrictif, et ressoulève de nouvelles questions. Je dirai de ce passage à l'explicite qu'il est **assimilable à une prise de conscience de l'ordre du concept.**

Posons la question de l'existence en mathématiques en général. Au total, il y a deux sens du mot **exister**, plus exactement de la question d'existence, appliqué aux mathématiques. Il y a un sens métaphorique, un sens impalpable, ce sens se ramène à une possibilité de définition en liaison avec des théories antérieures et les questions par exemple sont de l'ordre: existe-t-il des géométries non euclidiennes, existe-t-il un nombre x tel que $x^2 = 1$? Et ces questions signifient en fait: peut-on adjoindre par des postulats nouveaux un X, un inconnu? J'estime que la pensée de cette liaison est redevable d'une philosophie du possible en général. Et elle est profondément difficile, parce qu'elle repose sur des problèmes qui sont implicités par eux-mêmes. Donc on a auto-référence et imprédicativité philosophique dans ce genre de questions. Mais il y a un sens intra-théorique qui est plus facile à thématiser, puisque le rapport à la philosophie du possible n'y est plus primordial. Il est défini à l'intérieur d'une théorie, à la différence du premier. Il s'applique aux objets de cette théorie et les questions sont de l'ordre: existe-t-il un point, un nombre, une fonction, une clôture, un espace, un revêtement, etc., tel que (C), parmi les objets de la théorie, où (C) est une **condition** quelconque, faisant ou ne faisant pas sens. Ce deuxième sens, le sens

EXISTENCE MATHÉMATIQUE

Implicite pur de la question/
Explicite méthodologique.
Débat sur la préexistence et sur la convergence [harmonie] des méthodes.
Unité et interexpressivité des mathématiques.
Le problème du rapport entre l'intuition constituante et le projet déductif.

SYNTHÈSES

L'existence des «objets» en mathématiques est corrélative de l'**actualisation** d'une méthode.
ACTE ET EXISTENCE
Résultats virtuels: «théorèmes conjecturaux»
L'Acte, la Puissance et la virtualité des **synthèses**.

Réflexions sur:
L'objectivité mathématique
Le «type d'être» qui revient aux entités mathématiques
Débats:
Idéalisme/Réalisme/Positivisme
Intuitionnisme/Formalisme/Logicisme

POSITIONS

Questions redevables d'une problématique philosophique universalisable.

Comparaison «brute» entre

1. la structure relativement réduite des preuves philosophiques d'existence

2. la structure synthétique étendue [accumulation de strates d'idéalisation et de thématisation] des démonstrations d'existence en mathématiques.

Émergence mathématique de la **synthèse**.

Autonomie de la **constructivité**.

intra-théorique, est clairement relié aux théorèmes d'existence en mathématiques. Dans ces conditions, il faudra dire que le sens intra-théorique **dérivatif** (au sens ou dériver = fournir une preuve, démontrer, montrer, prouver) de l'existence d'entités mathématiques est **irréductible à la notion de possible**, et je pense que c'est là une **première gradation à l'explicite.**

Revenons à l'**existence mathématique**. Elle se distribue en deux ordres divisés. Un ordre qui a plus profondément rapport avec l'association des deux termes «philosophie et mathématiques», et un ordre qui a plus profondément rapport avec le syntagme nominal «philosophie des mathématiques».

Le premier ordre, la première veine de questions, est une veine qui a été très largement considérée, à la suite de l'oeuvre de Cavaillès, par l'école française de philosophie des mathématiques. L'autre aspect, qui est plus intra-théorique et qui est plus technique, a été quasiment exclusivement considéré par Cavaillès et Lautman. On a une réflexion dans le premier ordre sur l'objectivité mathématique. Ou sur le type d'être qui revient aux entités mathématiques. Ce sont les options que développent respectivement Jean Petitot et Jean-Michel Salanskis. Dans cette galaxie, s'inscrivent des débats entre idéalisme, réalisme et positivisme, ou entre intuitionnisme, formalisme et logicisme. Ces débats ne sont pas exclusivement redevables de ce qui se passe dans les mathématiques, mais sont vraiment co-impliqués par des problématiques philosophiques générales. Et ce type d'existence aboutit à une thèse de l'existence comme position de l'être. Nous retrouvons – miraculeusement – la thèse kantienne: l'être ne peut être qu'un être posé. Et donc les réflexions, les problèmes philosophiques qui se posent en mathématiques dans cette veine, sont

des réflexions qui se posent la question de l'utilité ou de l'adéquation d'un système formel, de son rapport à la vérité. Nous retrouvons toutes les problématiques de l'axiome du choix, du continu, nous retrouvons la philosophie de Gödel, spectre de platonisme décisionnel obscur et troublant. Ces questions sont redevables d'une problématique philosophique universalisable.

Dans un autre ordre d'idées, qui va nous conduire à ce que nous avons appelé la **naissance des synthèses**, il y a un **implicite pur de la question** qui peut, en droit et en fait être **opposé** à un **explicite méthodologique**. Je vais y revenir sur des exemples précis qui déclenchent, au second ordre, un débat sur la préexistence et sur la convergence inter-harmonieuse des méthodes, laquelle fait naître de nouvelles problématiques, si l'on constate cette unité cohérente des mathématiques. **Le problème du rapport entre une intuition constituante et le projet déductif est présent ici**, et c'est l'aspect des synthèses qui est ici crucial en ce qui concerne l'existence mathématique. **L'existence des objets mathématiques**, comme l'a écrit Cavaillès, **est corrélative de l'actualisation d'une méthode.**

C'est ce genre de problématique sur les synthèses qui est présent quand on parle de résultats virtuels, de résulats conjecturaux, quand on «sent» qu'on a un résultat, mais qu'on ne l'a pas encore, qu'on sent que les choses sont vraies, mais qu'on n'arrive pas à les formuler. L'aspect de la synthèse est présent dans la conjecturalité en mathématiques, mais, pour ainsi dire, bénéficiant d'un langage supérieur au langage formulaire. Et je pense que le problème de l'existence doit être posé en relation avec la conjecturalité. Nous revenons donc sur **l'acte, la virtualité et la puissance des synthèses**, et ceci nous tire peut-être en direction de questions universalisables.

théorie des ensembles
arithmétique des nombres entiers
arithmétique primitive récursive
herméneutique du continu

théorie des catégories

LA THÈSE DE L'ÊTRE COMME
EXISTENCE DE STRUCTURES POSÉES

«groupes, anneaux,
« corps, espaces vectoriels»

espaces de Banach
espaces de Fréchet
espaces de Sobolev

variétés topologiques
variétés différentiables
fibrés vectoriels
fibrés principaux
formes différentielles
courants

ensembles algébriques
ensembles analytiques
ensembles semi-algébriques
ensembles semi-analytiques
ensembles sous-analytiques

Je rappelle la comparaison entre la structure assez réduite des preuves d'existence, comme les preuves de l'existence de Dieu des métaphysiciens, qui se ramènent finalement à des syllogismes *assez courts*, et en revanche la structure synthétique étendue, qui incorpore des strates d'idéalisation et de thématisation, dans les théorèmes d'existence en mathématiques.

Voici un diagramme qui permet de voir certaines réalisations de l'être comme être posé dans les mathématiques, incorporant des exemples. Je suis parti de la thèse de l'être comme position de l'être, comme existence de structures posées, structures qui existent parce qu'elles sont posées. Le dialogue avec les prétextes de la position est très actif quand on parle de la théorie des ensembles, de l'arithmétique des nombres entiers, de l'arithmétique primitive récursive. En analyse, cette thèse de position de l'être débouche sur plusieurs notions d'espace topologique, par exemple: les espaces de Banach, de Fréchet, de Sobolev. On dispose de structures algébriques variables *ad libitulm.* Je me contente de vous rappeler, en géométrie, celles-ci: structure de variété différentiable, de fibrés vectoriels, principaux, notions de courants, de formes différentielles, etc. En géométrie analytique, on a des notions d'ensembles analytiques, semi-analytiques, sous-analytiques, et une condition de clôture renfermée dans un théorème dû à Gabrielov (d'après lequel la classe des sous-analytiques est stabilisée par les opérations ensemblistes élémentaires – on pourrait d'ailleurs interroger l'analogie entre le fonctionnement de la preuve en géométrie sous analytique, les gestes dont on apprend qu'ils constituent une stratégie théorique gagnante, notamment la **projection**, et la condition de clôture sous-jacente à la définition des ensembles récursivement énumérables: y trouverait-on une unité d'affaiblissement (la projec-

IDÉE DE CONVERGENCE,
APPROXIMATION, DISCRÉTISATION,
RÉGULARISATION
équations intégrales, différentielles
spectres d'opérateurs

LOCAL/GLOBAL. IDÉES DE SUBMERSION,
DE TRANSVERSALITÉ, DE STRATIFICATION,
D'ÉCLATEMENT. Conditions différentielles,
géométrie et topologie,
invariants de noeuds,
résolutions de singularités.

L'INTERROGATION EN DIRECTION
DE L'EXISTENCE
(DES réalisations)

IDÉE D'«INVARIANTS»
«Jeux d'enfants»
à la Grothendieck

IDÉE DE CARACTÉRISATION
(IDÉE TRANSVERSALE)

POSITIVITÉ, ELLIPTICITÉ
(conditions non dégénérées)
coercitivité, inégalités L^2
théorèmes d'existence
en géométrie analytique complexe

raffinements des schèmes d'origine
ex. courbes pseudoholomorphes à la Gromov:
existence avec création d'homologie
non triviale

tion), congénitalement universelle, et scrutable par la pensée?). Tout cela pour dire que **la thèse de position de l'être d'une structure est aussi redevable d'un relèvement synthétique** qui n'est jamais évident a priori.

Envisageons maintenant l'interrogation en direction de l'existence reliée à la naissance des synthèses. Profondément, la synthèse est une interrogation en direction de l'existence. Et cela, je vais le montrer sur des exemples précis au sein desquels on verra s'introduire des **réalisations** qui elles-mêmes reposent sur des schémas démonstratifs, par exemple, pour les plus connus, schémas de convergence, d'approximation, de discrétisation, ou de régularisation. Ces synthèses sont présentes dans les résolutions d'équations différentielles, dans la théorie du spectre des opérateurs, et plus généralement, toutes les fois qu'interviennent des approximations. L'interrogation en direction de l'existence se réalise partiellement en posant des notions provisoires et arrive à **dominer son indécision devant l'existence** grâce à cette idée de convergence. Pour le dire de manière plus explicite, les équations aux dérivées partielles s'articulent autour de notions de positivité, d'«explicitité», d'ellipticité, d'hyperbolicité, de parabolicité, qui sont des conditions fortes et non dégénérées, donc qui se révèlent insuffisantes pour certains problèmes. Certaines méthodes utilisant de la positivité, appelées «inégalités L^2» (Hörmander, Skoda, Sibony, Demailly, Ohsawa), donnent accès à des théorèmes d'existence très nombreux en géométrie analytique complexe, grâce à l'ellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann. Mais cette interrogation en direction de l'existence se réalise sous forme d'autres synthèses, lorsqu'on a inscription dans la dialectique du local et du global. Elle se réalise avec l'idée de submersion, de transversalité, de stratification, d'écla-

ÉQUATION(S)

⇓

«Quelles conditions assurent...?»
«Existence d'invariants?»

EXISTENCE DE SOLUTIONS (QUESTION)

interrogation caractérisée par son amorphisme, vide, quasi-nulle, indécise.

naissance de synthèses

↓

DÉDUCTION PARTIELLE

↙ ↘

RÉALISATION PROGRESSIVE

↓

EXIGENCE DE LECTURE DANS LA STRUCTURE MÊME (LEBESGUE)

↓

POSITIVITÉ(S)

↓

SCHÉMAS EXPLICITES DE DÉRIVATION D'EXISTENCE

⇔

PROPRIÉTÉS DÉCISIVES

⇑

relèvement

⇑

re-soulèvement de questions pures d'existence.

‖

EXISTENCE SYSTÉMATISÉE
POSITION DE DOMAINES ONTOLOGIQUES

↓

EXISTENCE RÉALISÉE,
GÉOMÉTRIE ET CONTINU
ENRACINEMENT DANS LA GÉNÉRICITÉ ET SES ÉVIDENCES

tement, etc. Mais elles se réalisent aussi, de manière générale et transversale, sous la gouverne et la domination des idées d'invariant et de caractérisation. On a aussi des réalisations inattendues ou miraculeuses qui sont des raffinements de ces schèmes d'origine, qui sont des schèmes «en position générale», pour parler de manière métaphorique (entendons que les notions de submersion, de positivité, sont des notions fortes, «en position générale», coercitives, stables, au sens où, si on perturbe les données initiales du problème, il demeure encore résoluble, et avec les mêmes solutions à une petite perturbation près). Ainsi, en géométrie, peuvent se produire des raffinements des schèmes d'origine. Pour l'illustrer, citons les travaux de Mikhail Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, et un de ses théorèmes d'existence accompagné de création d'homologie pour une solution non triviale.

La question pure d'existence.

La question de l'existence en mathématiques est tout simplement posée quand on se trouve devant des équations dont on ne sait rien. Le schéma général est le suivant: on rencontre certaines équations et on se pose simplement la question de l'existence de solutions.

Il y a une embryogénèse des synthèses dès que l'on se pose la question: quel type d'hypothèses vais-je pouvoir ajouter à mon équation pour qu'il y ait quand même des solutions, hypothèses hypothétiquement en relation avec l'existence d'invariants que je sache désigner à partir de ce que je ne sais pas. Envisagée à sa racine, cette interrogation est caractérisée par son **amorphisme**, elle est complètement **amorphe**, elle est sans forme, elle est sans structure, **et elle ne demande qu'à se réaliser**. Elle est vide, elle est nulle, elle est sans structure, elles est indécise, et elle est très profon-

Équations

$$F(x,y)=0, \quad x\in E, y\in F$$

$$F(x,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)=g_{kl},\ 1\leq k,l\leq n$$

$$\Phi\circ\Psi=\mathrm{Id}$$

$$\varphi(s)+\lambda\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt=f(s)$$

$$x=-T_1H(x,w,\lambda)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\nabla u=f-\nabla p+\nu\Delta u$$

dément indécise, elle est préplatonicienne, elle est **socratique**. Nous ne savons pas ce que nous allons faire, nous savons seulement que nous ne savons rien et que nous devons ne pas oublier cette ignorance, sous peine d'inventer une méthode qui trahira la question d'origine. À la suite de Baire, de Lusin et de Lebesgue, on rappellera que **les hypothèses simplificatrices sont toujours des hypothèses faussement simplificatrices.** Cette éducation méthodologique, elle aussi, débouche sur l'être posé. On s'égare à nouveau facilement dans les territoires flous de la position de l'être. Parfois, l'existence est réalisée par position de structure, le continu est rédimé par la notion de complétude, laquelle est nécessaire pour pouvoir poser la convergence des processus itératifs. Mais pour ce qui est des théorèmes d'existence, en eux, les existences se réalisent **progressivement**. Et elles se **réalisent**, parce que, ce qu'elles réalisent progressivement, c'est que **traduire un théorème d'existence appelle le biais de l'explicite**, il faut **prendre levier sur des majorations**, avoir quelque chose de majorant, **une position de positivité scrutable à l'étape finale** – une propriété cruciale de positivité, ou encore des **propriétés de convexité** qui assurent des extériorités suffisantes entre certains compacts, ou encore des **conditions de transversalité**, des conditions différentielles qui puissent permettre d'aller plus loin dans les théorèmes d'existence, et maintenant se constituent des **maximes explicites** prêtes à la **reproduction** et au **redoublement**. Jean Leray résume tous les travaux possibles dans le domaine des équations aux dérivées partielles par sa maxime: **«résoudre, c'est majorer.»** Ensuite, il peut se produire une prise de conscience supplémentaire. J'aurais voulu parler longuement de Lebesgue, l'un des mathématiciens qui a vraiment pris conscience qu'il faut **lire**

ECOLE NORMALE SUPERIEURE BIBLIOTHEQUE

dans l'équation elle-même, dans sa structure même, la possibilité d'existence des solutions. Lebesgue donne vie à une **exigence mathématicienne**, exigence au sens des lectures cavaillèsiennes des oeuvres de mathématiciens du début du vingtième siècle, et qui débouche presque toujours comme je l'ai dit, sur des conditions de positivité explicites, mais qui, dans les travaux de Lebesgue, débouche sur les conditions minimalement suffisantes.

Enfin, après un dernier mouvement de prise de conscience, on peut poser des schémas explicites de dérivation d'existence. Ainsi le schéma standard de l'analyse des équations aux dérivées partielles consiste à traduire d'abord l'existence de solutions faibles et à récupérer ensuite l'existence de solutions fortes, c'est-à-dire de la régularité.

À partir de là, on assiste alors à un **ressoulèvement de questions pures d'existence**. Si les conditions ne sont pas les plus fines, en particulier, si elles sont trop non dégénérées, trop elliptiques, elles ne rendent absolument pas compte de l'existence de solutions de systèmes différentiels beaucoup plus généraux. Ainsi, le dessin de conditions explicites et positives ressoulève la question pure d'existence pour **répondre au besoin de généralisation**. Ce ressoulèvement des questions pures d'existence, par exemple, a été illustré en 1957, quand Hans Lewy a, le premier, parce qu'il en eut l'intuition, produit un contre-exemple: une équation aux dérivées partielles n'ayant aucune solution, à une époque où presque tous les spécialistes étaient convaincus ou tentés de penser que tout système linéaire d'équations aux dérivées partielles possédait toujours une solution non nulle. Toute question d'existence, dès qu'elle s'incarne, ressoulève la question et **retourne au moment**

DISCOURS ET RAISONNEMENT

interrogation du discours sur lui-même

naissance des synthèses

DÉDUCTIBILITÉ

le déductif: désigné, découpé, autonomisé

SYSTÈME DÉDUCTIF SCIENTIFIQUE

SYSTÈME FORMEL

. Interprétation
. Non contradiction
. Complétude
. Existence
. Référence

ÉCLATEMENT,
RELATIVISME,
OUVERTURE

échec des démonstrations de non contradiction

INDÉCISE POSITION DES AXIOMES

RÉPONSES INASSUMABLES:
LE VRAI EXCÈDE
LE PROUVABLE

SYSTÈMES PHILOSOPHIQUES

DIALECTIQUE RATIONNELLE

UNIVERSEL RÉEL
SAVOIR ABSOLU

la question de la POSITION du SYSTÈME

questions internes

système comme dispositif symbolique

syntaxe générative

perspective métathéorique:

le système formel est lui-même

objet d'étude, il a une morphologie,

il fournit une représentation du raisonnement.

systèmes et métasystèmes: «thématisation».

LE FONDEMENT INACCESSIBLE, EN MANQUE D'ÉLÉVATION

où l'existence de la solution était imprégnée d'indécision. Chaque propriété décisive est prétexte à une insatisfaction de la raison.

L'idée de déductibilité et les systèmes formels.

On aurait pu mettre ces éléments en rapport avec un diagramme analogue que voici: l'incarnation progressive de l'idée de déductibilité, issue du discours et du raisonnement, issu du logos grec originel. L'interrogation du discours sur lui-même provoque des synthèses, provoque la naissance de structures syntaxiques, il y a prise progressive de conscience de la nécessité de thématiser la déductibilité en tant que telle – laquelle a reçu plusieurs incarnations dans divers systèmes philosophiques. Les premiers travaux de Cantor et de Frege... on a pris conscience progressivement que cette incarnation de la déductibilité était redevable de questions supplémentaires, à savoir, si les systèmes formels que l'on était tenté de proposer et dans lesquels devait se refléter tout ce que nous pouvions croire comme étant le lieu de déploiement du vrai et de sa constitutivité potentielle, si ces systèmes étaient vraiment non contradictoires. Intense moment de lucidité! Et ensuite, ce mouvement a connu un **éclatement historique** remarquable, à cause du théorème de Gödel. Moment où l'**interprétation** d'un résultat débusque les péripéties de sa preuve.

Pour illustrer, revenons au schéma posé précédemment. On part d'une équation ou d'un théorème, et on se pose la question de l'existence de la solution sous-jacente. Évoquons un résultat d'existence bien connu et ancien: le théorème des fonctions implicites. Ce sera l'occasion de montrer que la recherche d'un théorème des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet présente des obstacles techniques contournables à condition seulement de poser des schémas explicites supplémentaires. Géo-

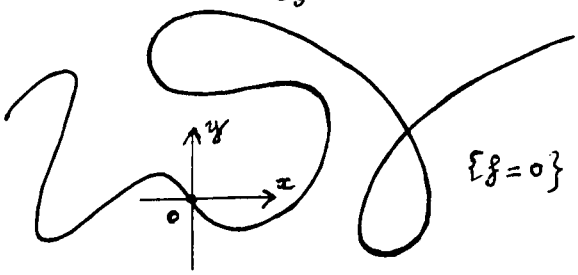
Théorème des fonctions implicites

$f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $f(0,0) = 0$.

$$f(x,y) = 0 \overset{??}{\Longleftrightarrow} \quad y = \varphi(x) \; [ou \; x = \psi(y)].$$

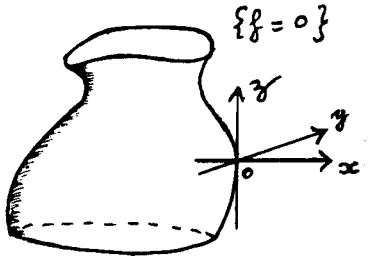
Trouver des conditions pour que l'on puisse résoudre par rapport à une variable.

Condition suffisante: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$.



$$f(x,y,z) = 0 \overset{??}{\Longleftrightarrow} \quad z = \varphi(x,y) \; [ou \; x = \psi(y,z) \; ou \; y = \chi(x,z)].$$

Condition suffisante: $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$.



$$\begin{array}{lcl} f_1(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q) = 0 & & y_1 = \varphi_1(x_1,...,x_p) \\ \cdots\cdots\cdots & \overset{??}{\Longleftrightarrow} & \cdots\cdots\cdots \\ f_q(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q) = 0 & & y_q = \varphi_q(x_1,...,x_p) \end{array}$$

$$\text{dét} \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_{1 \leq i,j \leq q} (p_0) \neq 0.$$

métriquement, le théorème des fonctions implicites admet une interprétation bien connue: si l'on se donne un ensemble de zéros d'une fonction réelle de variables réelles, disons $f(x, y)$, on souhaite remplacer ce lieu par un lieu plus simple, de la forme «bien visible» $y = f(x)$. L'interprétation est donnée par la figure: il faut que l'on puisse trouver une direction d'axe non tangente à un tel lieu, s'il est non singulier. Maintenant, il est parfois nécessaire d'opérer une rotation des axes de coordonnées, mais la condition est bien assimilée avec la figure. Le problème: **trouver des conditions** pour que l'on puisse résoudre localement par rapport à une variable, peut déjouer l'implicitation d'origine de sa position. Faisceau de conditions suffisantes, ou condition suffisante unique qui assimile les étapes de sa métamorphose et de ses généralisations, celle qui est bien connue et très intuitive porte sur la différentielle d'ordre un de la fonction. Il faut bien voir que le projet intuitif déborde le cadre trop étroit des manipulations opératoires. Ici, la condition portant sur $\frac{\partial f}{\partial y}$ est accompagnée d'hypothèses à la fois muettes et facilement explicitables, une fois parcouru le chemin des réalisations conceptuelles de la géométrie différentielle. Hypothèse de différentiabilité, hypothèses de continuité de la différentielle, **hypothèses explicites** et donc par celà même synonymes de clôturation partielle d'un champ de questions emporté avec la seule question d'origine: comment comprendre comme intrinsèquement **régulier** le **lieu des zéros** d'une fonction de plusieurs variables? On pourrait insister sur la nature de seule suffisance de ces hypothèses, comme l'est l'hypothèse de convergence uniforme pour assurer l'intégrabilité ou la différentiabilité terme à terme, suffisance que l'on hésite à mesurer avec le nécessaire pour des raisons qu'il reste à élucider. Mais le point qui fait l'objet d'un commen-

Version dans les espaces de Banach.

E, F, espaces vectoriels normés complets. Calcul différentiel.

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. *Soit $f : (U \subset E) \to F$, f' continue. S'il existe $A : F \to E$ linéaire, continu, tel que $f'(x_0)A = Id_F$, alors il existe g de classe C^1 près de $y_0 = f(x_0)$ tel que $f \circ g(y) \equiv y$. Si $f'(x_0) : E \to F$ est un isomorphisme, f est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $f(x_0)$.*

Hypothèses explicites.

(1) $\exists$ A inverse à droite **continu**: $||A|| < \infty$, $f'(x_0)A = \mathrm{Id}_F$.

(2) $||f'(x_1) - f'(x_2)|| \leq \varepsilon(x_1, ||x_1 - x_2||)$, $\varepsilon(x, \delta) \to 0$, si $\delta \to 0$.

Méthode: itérations à la PICARD. (≀ énoncé de «point fixe.»≀)

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. *E_1, E_2, F espaces de Banach. $f : U_1 \times U_2 \to F$ de classe C^1, $(x_0, y_0) \in U_1 \times U_2$. Si $\exists$ $A = U_2 \to U_1$ linéaire continu tel que*

$$f'_y(x_0, y_0)A = Id_{U_2},$$

alors $\exists$ $g : V_1 \to U_2$ de classe C^1 tel que $f(x, g(x)) \equiv f(x_0, y_0)$, i.e.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow y = g(x).$$

Preuve. C'est le théorème d'inversion locale appliqué à $F(x, y) = (x, f(x, y))$.

taire aujourd'hui est l'état d'éclaircissement et de resserrement corrélatif que subit la question de la régularité locale des hypersurfaces: double accès à la rigueur et à la certitude qu'entraîne l'exigence des explicitations.

Voici une version du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach. Juste une remarque: on passe du cas des espaces de dimension finie aux espaces vectoriels normés complets de dimension infinie «*at no extra cost*», comme l'écrit LANG. Par idéalisation modérée, pourrait-on dire. En effet, démonstration et méthode, hypothèses et énoncés sont isomorphes entre les deux cas. Le schéma explicite pose deux hypothèses: l'**existence d'un inverse à droite continu** de la dérivée de notre application et la **continuité de la différentielle** de l'application différentielle. Elles interviennent comme la cheville ouvrière lisible dans la démonstration classiquement connue. On se ramène à un processus itératif, lequel se ramène à la question de savoir si la composition illimitée d'applications converge vers une application constante. C'est oui, on s'y attend, si l'application est **contractante**, mais reste à savoir si la limite existe dans l'espace sous-jacent. Heureusement, cette question est déjà répondue, est c'est justement pour assurer cette convergence que l'on a supposé que E et F étaient des espaces **complets**.

En résumé, un résultat aussi intuitif que le théorème des fonctions implicites emporte avec lui un faisceau de conditions – toujours révocables au regard des raffinements possibles – qui peuvent s'interpréter comme des **réalisations explicites** ou des **synthèses** nées du **faisceau de questions coexistentes**. Si le platonisme en mathématiques est possible, à la fois comme un vécu de la *conscience chercheuse*, comme une croyance naïve ou encore comme une confiance dans l'avenir

Théorème de Nash-Moser

Méthode itérative à la PICARD: $|u_{n+1} - u_n| \leq \theta |u_n - u_{n-1}|$, $0 < \theta < 1$. Elle devient défectueuse lorsque se produit un phénomène de «perte de régularité»: si l'on ne peut estimer $|u_{n+1} - u_n|_{C^r}$ qu'en termes de $|u_n - u_{n-1}|_{C^{r+s}}$, $s > 0$, toutes les dérivées finissent par être consommées au bout d'un nombre fini d'approximations par itération. *cf.* NASH 1956.

IDÉE: Inscrire à chaque étape une opération de *régularisation.* Ex.:

$$v = \sum_k v_k e^{ikx}, \ k = (k_1, ..., k_d) \qquad T_N v = \sum_{|k| \leq N} v_k e^{ikx}.$$

Possibilité de dominer l'imprécision supplémentaire ainsi introduite si, par exemple, une étape correspond à un algorithme à convergence rapide de type Newton: $|u_{n+1} - u_n|_r \leq c|u_n - u_{n-1}|^2_{r+s}$.

RECHERCHE D'UN SCHÉMA EXPLICITE

Motivation. Problème du plongement d'un tore riemannien de dimension deux dans $\mathbb{R}^5$. On pose $\mathcal{B}_r := C^2_{2\pi-per}([0, 2\pi]^2)$, $\mathcal{U}_r = \{(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5);\ f_j \in \mathcal{B}_r\}$, $f(x_1, x_2)$, $|u|_r$, $u \in \mathcal{U}_r$. $\mathcal{G}_{r-1} := \{g_{11}(x), g_{12}(x), g_{22}(x)\}$, g_{11}, g_{12}, g_{22} composantes de la première forme fondamentale. **Équation:**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_l}\right) = g_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq 2.$$

Le problème est de trouver u pour une métrique g donnée. Comme d'habitude, on suppose que g se trouve suffisamment proche d'une solution *plongée* (u^0, g^0) *donnée* et on suppose que le déterminant

$$\Delta(u) = \text{dét} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \neq 0.$$

Le système linéarisé de l'équation, en notant $f(u) = \{(u_{x_k}, u_{x_l}) - g_{kl}\}$

$$f'(u)v = \{(u_{x_k}, v_{x_l}) + (u_{x_l}, v_{x_l})\} = h_{kl}$$

auquel on ajoute les conditions $(u_{x_k}, v) = 0$, $k = 1, 2$, se simplifie et devient $-2(u_{x_k x_l}, v = h_{kl})$, et il est inversible, d'après $\Delta(u) \neq 0$, et il définit Lh.

d'une réponse prédéterminée, c'est sûrement parce que les hypothèses à rechercher prétextent inlassablement le résultat en vue. Il existe un **double intuitif** de tout le basculement originel du socratisme au platonisme, dont l'étude serait peut-être un cercle, sinon une contradiction dans les termes. Retenons surtout la désignabilité de l'explicite et l'interprétabilité de son rôle crucial dans le schéma de dérivation que constitue le théorème des fonctions implicites. Un tel discours motivé sur l'explicite, on s'en doute, est corrélatif du mouvement de **prise de conscience de l'ordre du concept** qu'a engendré la modernisation des mathématiques et de son **effectivité travailleuse** dans les pratiques de la recherche aujourd'hui.

La question d'existence d'un inverse pour une fonction différentiable se pose aussi dans les espaces de Fréchet. Ceux-ci sont des espaces vectoriels «presque normés» au sens où ils sont munis d'une famille infinie de semi-normes qui décrivent une sorte d'exhaustion à l'infini par des pseudo-normes. Typiquement, ce sont: l'espace des applications $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété compacte à valeurs dans un certain $\mathbf{R}^q$, muni de l'ensemble des semi-normes suivantes: $|f|_k = \sup_{x\in M} ||D^k f(x)||$. Ou encore, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, muni de la famille des semi-normes suivantes: pour une exhaustion de Ω par des compacts, $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} K_m$, $K_m \subset K_{m+1}$, on pose: $p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in K_m} |\partial^\alpha f(x)|$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$. La question est donc de trouver, de formuler, de dessiner, des conditions suffisantes pour qu'il existe un inverse différentiable au sens de Fréchet, d'une application $\Phi : E \to F$ donnée. Bien entendu, on s'attend à ce que l'idéalisation sous-jacente à cette interrogation nous invite à supposer, comme dans le cas banachique, que l'application dérivée soit inversible, avec de bonnes propriétés de régularité. On se convainc assez vite

Espaces de Fréchet

(D'après Lojasiewicz and Zehnder)

E: espace vectoriel muni d'une famille infinie de semi-normes. Typiquement: $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^q)$, M variété compacte, avec

$$|f|_k = \sup_{x \in M} ||D^k f(x)||,$$

ou bien: $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, exhaustion $\bigcup_m K_m = \Omega$, $K_m \subset K_{m+1}$ compacts, avec

$$p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x \in K_m} |\partial^\alpha f(x)| \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Soit $\Phi : E \to F$ différentiable au sens de Fréchet, $\Phi(0) = 0$.

TROUVER DES CONDITIONS [Suffisantes] pour que: $\exists \Psi : F \to E$

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}.$$

Exemple. $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$f \mapsto \exp f$

Φ n'est pas inversible bien que $D\Phi(f)u = e^f u$ le soit.

Abstraction. E muni d'une suite de semi-normes $|.|_n$, $n \in \mathbb{N}$

(1) $$|x|_n \leq |x|_m \quad \text{si} \quad n \leq m.$$

Famille d'opérateurs régularisants $S_\theta : E \to E$, $\theta \geq 1$, $\theta \to \infty$,

(2) $$|(1 - S_\theta)(x)|_k \leq C\theta^{-(n-k)}|x|_n$$

$$|S_\theta x|_n \leq C\theta^{n-k}|x|_k, \quad x \in E, \theta \geq 1, 0 \leq k \leq n.$$

de l'insuffisance de cette seule condition, ce qui relance d'autant plus la question. L'enjeu s'affine, les conditions étant invisibles. On peut parler du problème, de la motivation d'origine de cette recherche. Il s'agissait pour Nash, de donner un sens à un problème perturbé de plongement d'une structure riemanienne abstraite en tant que structure riemanienne induite par la métrique standard d'un bon $\mathbf{R}^n$. Plus généralement, une telle version des fonctions implicites dans les Fréchet s'appliquerait à plusieurs équations aux dérivées partielles non linéaires qui exigent, pour leur résolution, l'interposition d'un schéma itératif qui incorpore une dérivation à chaque étape (sans que le schéma puisse être réduit à un processus inverse d'intégration, comme cela est le cas pour les équations différentielles ordinaires). La dérivation doit être corrigée. Si on applique le processus directement, au bout d'un nombre fini d'étapes, toute la régularité des données initiales s'évanouit. Alors la structure même de l'équation inspire l'idée d'introduire une régularisation à chaque étape: c'est l'issue naturelle.

L'imprécision supplémentaire introduite par l'étape de régularisation doit être corrigée par un processus itératif rapidement convergent. Si nous posons la recherche d'un schéma explicite, nous pourrions nous inspirer de l'algorithme de Newton, connu par exemple pour les très bonnes solutions approchées de la racine carrée qu'il peut donner. Une des raisons connues de ce phénomène est l'approximation quadratique de la différence à chaque étape.

Ainsi, à travers la recherche de ce schéma explicite se jouent des questions que nul texte mathématique n'explicite complètement, que nulle analyse philosophique ne pourrait peut-être comprendre en totalité, mais qui finissent par prendre forme

Inégalité de convexité:

(3) $\quad |x|_l \leq C|x|_k^{1-\alpha}|x|_n^{\alpha}, \quad l = (1-\alpha)k + \alpha n, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$

Exemple. M variété compacte, $\mathcal{C}^\infty(M)$, $\mathcal{C}^K(M)$, $\mathcal{C}^{k,\varepsilon}(M)$, Sobolev.
Condition de croissance sur Φ:

(4) $$|\Phi(x)|_n \leq C|x|_{n+d_1}, \quad d_1 > 0.$$

Typiquement: $\mathcal{C}^\infty(M)$, Φ = opérateur différentiel *non linéaire*
$l = d_1$ = degré de l'opérateur
= «perte de dérivées».

Différentiabilité de Φ:

(5) $$|\Phi'(x)v|_n \leq C(|x|_{n+d_2}|v|_l + |v|_{n+d_2}).$$

Existence d'un inverse à droite continu

(6) $$\Phi'(x)L(x)y = y, \qquad (x,y) \in U \times F$$

(7) $$|L(x)y| \leq C(|x|_{\lambda n+d}|y|_d + |y|_{\lambda n+d}), \quad \textit{some } \lambda \geq 1.$$

On permet $\lambda > 1$, *i.e.* la perte de régularité autorisée pour résoudre le problème linéarisé (6) augmente avec n.

(8) $$|R(x;v)|_n \leq C(|x|_{n+d_2}|v|_l^2 + |v|_l|v|_{n+d_2}),$$

où R = reste = $\Phi(x+v) - \Phi(x) - \Phi'(x)v$. Cas $\lambda = 1 \leftrightarrow$ théorème classique des fonctions implicites.

THÉORÈME. *Supposons que* $\Phi : (U \subset E) \to F$, $\Phi(0) = 0$, *satisfait les conditions de croissance et de régularité* (4) – (8) *avec* $1 \leq \lambda < 2$. *Alors il existe des constantes* $s_0, \delta, l > 0$, $s_0 = O_2((2-\lambda)^{-1})$ *et une application* $\Psi : (V \subset F) \to U$, $\Psi(0) = 0$, *définie dans l'ouvert* $V := \{y \in F;\ |y|_{s_0} < \delta\}$, *satisfaisant*

$$\Phi \circ \Psi(y) = y, \quad y \in V,$$

et l'estimation

$$|\Psi(y)|_l \leq C|y|_{s_0}.$$

$\lambda = 2$: cas limite, contre-exemple (voir LOJASIEWICZ and ZEHNDER). La condition $\lambda < 2$ est liée [explicitement] à l'itération dans la méthode:

Modification (insertion de régularisations)
de l'algorithme de Newton.

Équations aux dérivées partielles
(d'après Bernard Malgrange)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty$,

$$i^{|\alpha|} D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha_1|+\cdots|\alpha_n|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

CHERCHER DES CONDITIONS POUR QUE $PL^2(\Omega) \supset L^2(\Omega)$, *i.e.*

$$\forall\, f \in L^2(\Omega),\ \exists\, g \in L^2(\Omega) \text{ tq } Pg = f.$$

Assertion: une telle **propriété d'existence** dans $L^2(\Omega)$ des solutions de l'équation $Pg = f$ **est équivalente à des inégalités dans** $L^2(\Omega)$**.**

Soit P^* l'adjoint formel de P: $(P\varphi|\psi) = (\varphi|P^*\psi)$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

THÉORÈME 1 [Partie Analyse Fonctionnelle]. *On a l'équivalence entre:*

(i) $PL^2(\Omega) \supset L^2(\Omega)$;

(ii) $\exists C > 0, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad ||\varphi||_{L^2(\Omega)} \leq C||P^*||_{L^2(\Omega)}$.

Équations à coefficients constants

$$P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \qquad P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} P(\xi).$$

Inégalité de HÖRMANDER: Supposons Ω borné. Alors:

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$||P^{(\alpha)}(D)\varphi||_{L^2(\Omega)} \leq C_\alpha ||P(D)\varphi||_{L^2(\Omega)}.$$

et se constituer en une réalisation précise et rigoureuse. J'ai repris pour l'exposer la liste des conditions dégagées par Lojasiewicz et Zehnder, dans un article assez tardif par rapport aux deux articles de Nash et de Moser. Le problème est formulé en termes abstraits, les conditions sont posées en s'inspirant des conditions habituellement connues, comme par exemple la condition (2) sur les opérateurs régularisants ou les inégalités de convexité (3). La spécificité du théorème obtenu se lit dans le coefficient qui mesure la perte de dérivées associée au processus itératif pour l'application linéraire tangente (7). On y retrouve aussi, en faisant $\lambda = 1$, le théorème des fonctions implicites classique dans les espaces de Banach.

Dans le peu de temps qu'il nous reste, abordons les méthodes L^2 dans la théorie linéaire des équations aux dérivées partielles. Le but est de **trouver des conditions** pour l'**existence** de solutions d'une équation $Pg = f$, où P est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients peut-être constants. Comme bien souvent, on commence par affaiblir les conditions d'origines de la question et on la traduit d'abord dans le langage des distributions. De nombreuses interrogations philosophiques naissent ici, au contact de ce schéma général d'affaiblissement d'un problème, ou encore, de la dualité fondamentale et centrale entre l'accès aux solutions au sens des distributions et l'accès aux solutions dites fortes. Toujours est-il que notre problème se transforme en un problème au sens des espaces de solutions intégrables, possédant de bien meilleures propriétés de clôture que les espaces de fonctions lisses. La genèse conceptuelle de cette transformation ou transformabilité reste à éclaircir. Mais acceptons-la. Maintenant, la propriété d'existence d'une solution de $Pg = f$ est équivalente à des inégalités dans L^2. C'est le point crucial et

On dit que P est *plus fort* que Q dans Ω, $Q < P$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad ||Q(D)\varphi||_{L^2(\Omega)} \leq ||P(D)\varphi||_{L^2(\Omega)}.$$

$$Q < P \Longleftrightarrow \exists C > 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, |Q(\xi)|^2 \leq C \sum_{|\alpha|\geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2.$$

Opérateurs elliptiques. P elliptique d'ordre m si

$$\forall\, \alpha,\ |\alpha| = m,\ X^\alpha < P(\Longleftrightarrow \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, P_m(\xi) \neq 0).$$

Opérateurs de type principal.

$$\forall\, \alpha, |\alpha| \leq m-1, X^\alpha < P_m \ \ (\Longleftrightarrow \sum_{|\alpha|=m-1} \xi^{2\alpha} \leq C \sum_{\beta\geq 0} |P_m^{(\beta)}(\xi)|^2).$$

Exemples. Δ: elliptique.

$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ et $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ elliptiques.

$\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, elliptique ssi $(a_{ij}) >> 0$

type principal ssi (a_{ij}) non dégénérée.

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ type principal.

$\frac{\partial}{\partial t} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ non principal (parabolique, en fait).

Version à coefficients variables: uniformité dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 2. *Si P est de type principal dans Ω, $\forall\ a \in \Omega$, $\exists U \subset \Omega$ voisinage ouvert de a, $\exists C > 0$, tels que*

$$\sum_{||\alpha||\leq m-1} ||D^\alpha \varphi||^2 \leq C(||P\varphi||^2 + ||P^*\varphi||^2) \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pour l'obtention de théorèmes d'existence des solutions de $P(x, D)g = f$, *nous devons chercher à éliminer $||P\varphi||$ ou $||P^*\varphi||$ de cette inégalité* (*cf.* th. 1). **Il est nécessaire, pour cela, de faire certaines hypothèses.**

mathématiquement simple qui permet de comprendre comment il faut devoir lire dans la structure de l'opérateur la possibilité de l'existence d'une solution. Le fait est que le théorème 1, assigne cette correspondance entre l'action de l'opérateur sur les fonctions-test et l'existence de la solution. Il s'agit juste d'une dualisation bien éclaircie dans les espaces de Hilbert et d'une application du théorème de représentation d'une forme linéaire continue dû à Riesz.

Ainsi, la question est re-traduite une seconde fois: il faut trouver des conditions pour que l'inégalité (ii) soit satisfaite. Ici joue la forme de P. Nous avons une classification des opérateurs du second ordre, (dont l'analyse remonte aux travaux du dix-septième siècle sur les cordes vibrantes), qui est convoquée ici pour une nouvelle compréhension de l'existence de leurs solutions. En résumé, et pour terminer rapidement, la recherche de conditions explicites se réalise et l'on peut lire encore sur cet exemple l'histoire artificielle de la position d'hypothèses explicites se dessinant dans une dialectique de la «prise de conscience conceptuelle».

Si la partie principale de P est réelle, $P^*\varphi = P\varphi + Q\varphi$, $\deg Q \leq m-1$. D'où

$$(*) \qquad \sum_{|\alpha|\leq m-1} ||D^\alpha \varphi||^2 \leq C||P\varphi||^2.$$

Soit $c(x,\xi)$ la partie principale de degré $2m-1$ du commutateur $[P,P^*]$; si $c(x,\xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$c(x,\xi) = A(x,\xi)P_m(x,\xi) + B(x,\xi)\overline{P}_m(,\xi),$$

$\deg A$, $\deg B \leq m-1$ en ξ, on a aussi $(*)$.

On ne peut démontrer l'inégalité $(*)$ sans hypothèse supplémentaire sur P. En vérité, il existe des opérateurs de type principal P tels que $Pg = f$ n'admette aucune solution, pour certaines fonctions g de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il en est ainsi de l'opérateur de hans LEWY:

$$(n=3) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

THÉORÈME DE NON EXISTENCE DE HÖRMANDER. [**Condition nécessaire**]. *Soit P linéaire d'ordre m à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Notons $c(x,\xi)$ la partie homogène de degré $2m-1$ en ξ du commutateur $PP^* - P^*P = [P,P^*](x,\xi)$. Si $P(\mathcal{D}'(\Omega)) \supset \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$(**) \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ P_m(x,\xi) = 0 \Rightarrow c(x,\xi) = 0.$$

Les zéros de $[P,P^*]_{2m-1}$ recouvrent ceux de P_m.

COROLLAIRE. [**Non existence**]. *Supposons que la condition du théorème ne soit pas vérifié sur un ensemble de points dense dans Ω. Alors il existe* [!] *$f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ [commune] telle que pour tout ouvert U relativement compact dans Ω, on a*

$$P(\mathcal{D}'(U)) \not\subset f|_U.$$

Estimées L^2 et géométrie algébrique
(d'après J.-P. Demailly)

On cherche des solutions de l'équation $d''u = v$ avec des estimées L^2 explicites [very precise]. L'idée centrale, due à HÖRMANDER, est d'introduire des poids du type $e^{-\varphi}$, où φ est une fonction satisfaisant des conditions de convexité adéquates. Cette méthode procure de nombreuses généralisations des théorèmes standard d'annulation de la cohomologie sur des variétés faiblement pseudcoconvexes: on retrouve notamment les estimées originales de Hörmander pour les domaines pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, avec des applications à la géométrie algébrique, les estimées de Skoda pour les morphismes de fibrés vectoriels [holomorphes] surjectifs, une solution élégante du problème de Levi et des théorèmes de type Nullstellensatz.

Présentation du SCHÉMA;

1. PARTIE ANALYSE FONCTIONNELLE.
2. Répercussion des CONDITIONS DE POSITIVITÉ.

(X, ω) variété hermitienne complète, E fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X.

$$A_{E,\omega} = [ic(E), \Lambda] + T_\omega.$$

BOCHNER-KODAIRA-NAKANO-DEMAILLY: Si $A_{E,\omega}$ est *semi-positif* sur $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes E$, on a

$$||D''u||^2 + ||\delta''u||^2 \geq \int_X < A_{E,\omega}u, u > dV.$$

THÉORÈME D'EXISTENCE L^2. *(X, ω) complète, $A_{E,\omega} \geq 0$ en bidegré (p, q). Alors $\forall\ g \in L^2_{p,q}(X, E)$ telle que $D''g = 0$ et $\int_X <$*

$A^{-1}_{E,\omega}g, g > dV \leq \infty$, $\exists f \in L^2_{p,q-1}(X,E)$ *tq* $D''f = g$ *et*

$$||f||^2 \leq \int_X < A^{-1}_{E,\omega}g, g > dV.$$

Domaine d'application. (**Présence d'une exhaustion positive.**)
X variété faiblement pseudoconvexe

$$\Longleftrightarrow \exists \psi \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R}) \text{ d'exhaustion tq } id'd''\psi \geq 0 \text{ sur } X.$$

Notamment si:
$X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudoconvexe, ou $X =$ variété compacte.

PROPOSITION. *Si* (X,ω) *est faiblement pseudoconvexe, elle porte une métrique kählérienne complète* $\widehat{\omega}$.
Annulation(s) de cohomologie $\Longleftrightarrow$
résolubilité en certains bidegrés,
existence de formes satisfaisant
certains systèmes d'équations.

THÉORÈME. *Si* E *est un fibré en droites* $\boxed{\textbf{positif}}$ *sur une variété faiblement pseudoconvexe, alors*

$$H^{p,q}(X,E) = 0, \qquad p+q \geq n+1.$$

[Extensions par **idéalisation(s)**.
Géométrie **complexe** et **positivité**.]

Conclusion.

J'arrive au terme de cette réflexion. Par ces exemples, j'ai essayé de montrer

1) qu'il est nécessaire de poser des conditions explicites pour obtenir des théorèmes d'existence,

2) que toute question d'existence est impliquée dans une herméneutique indécise de la position d'hypothèses.

Ainsi, la question d'existence en général, ou le problème de savoir si les mathématiques constituent une ontologie, est peut-être une fausse question. Une question qui feint d'ignorer l'herméneutique virtuelle et auto-interprétative de la recherche en mathématiques. L'*epokhê* problématologique dirime sensiblement l'ontologie. Mais qu'on ne s'y trompe pas: l'antiréalisme positiviste n'a à aucun moment été convoqué au cours de cette réflexion, en raison des incompréhensions fondamentales qu'il manifeste quant à la problématicité même de toute pensée. Pour affirmer cette thèse encore plus précisément, ajoutons que l'on peut voir chez Lebesgue un travail des conditions nécessaires au regard des conditions suffisantes que le mathématicien est tenté de proposer, et que ce travail de la condition nécessaire s'incarne souvent et se réalise de manière spectaculaire, de manière prodigieuse, comme il est parvenu à s'incarner dans la théorie des ensembles. Ce que j'ai essayé de défendre aujourd'hui se résume de la façon suivante: les démonstrations d'existence en mathématiques ne confèrent pas l'existence à la notion, puisque l'existence est et se meut dans le non conceptuel. Nous aurions pu suivre de plus près le philosophe Étienne Gilson, en évoquant à nouveau les difficultés philosophiques réelles qui sont impliquées par la

pensée de l'existence, en évoquant les illusions essentialistes vilipendées par l'après-scolastique. Nous aurions pu parler plus longuement de la condition dégagée par Kant et revenir sur le rapport de l'esprit avec les nécessités internes de positions de l'être. Une nuance d'anti-objectivisme se module toujours de contextualisme, **mais ici-même, la contextualité ne désigne rien d'autre que celle de la question**. Ce que j'ai voulu mettre en lumière, c'est que la recherche en mathématiques est impliquée dans des questions d'existence amorphes, qui se situent à un niveau complètement indécis, et que les mathématiciens sont en présence de la nécessité de réaliser quelque chose face à ces interrogations. Et cette nécessité de réaliser est une exigence ici co-impliquée de l'idée de réponse complètement satisfaisante, donc de l'idée de condition nécessaire et suffisante, et aussi de l'idée de caractérisation. De plus, l'idée de caractérisation consiste la plupart du temps à effectuer des jeux interprétatifs entre algèbre, géométrie et topologie, au risque de recueillir des signes inattendus d'interdépendance, ou, au contraire, de scruter beaucoup plus consciemment l'irréductibilité réciproque d'un problème et d'un autre, leur étrangeté. Cette exigence est une exigence qui prend souvent racine dans l'affaiblissement des conditions d'origine. Parfois **besoin** gratuit de **généralisation** (mais besoin **pulsionnel** dont la forme et la communicabilité sont par celà-même très universelles), l'affaiblissement des hypothèse entretient un rapport dérivé aux «bonnes questions». Pierre Cartier l'a évoqué cette année: les questions à choisir doivent être bonnes. Mais est-ce seulement à l'équipe de recherche qu'incombe le dessein ou le désir de ces bonnes questions, ou ne faut-il pas conserver la mémoire du rapport de la raison à ses réalisations pour les engendrer? Les modes en mathématiques seront toujours

dominées par le rapport du réalisable à l'irréalisable.

À sonder ces indications, on comprendra que les mathématiques s'inscrivent de toute éternité dans une bipolarité de la réponse, en quête d'interprétation, ouverture amorphe d'un côté et faisceau de synthèses positives de l'autre, **une bipolarité de la réponse dans l'a priori d'une corrélation.** De même que, selon Jean-Toussaint Desanti, l'intentionnalité est le mode d'être de la conscience d'objet au coeur de ses objets, nous devons soulever le problème philosophique de rendre compte du réel mathématique pur a priori en décrivant cette nouvelle **intentionnalité questionnante**, laquelle serait, pour paraphraser la formule de Desanti, **le mode d'être de la conscience de question au coeur de ses questions.** En réhabilitant une lecture cavaillèsienne des textes mathématiques, on rejoindrait l'*esprit mathématique* de Lebesgue, pour resserrer l'ininterprétativité de notre approche. **En amont de l'expérience, en amont de l'autonomie, en amont de l'exigence, il y aurait la question.**

Comme conséquence, nous aurions une relativisation de la notion d'objet, d'abord, une relativisation de ce que l'on peut dire sur l'être, ensuite, sachant que ce que l'on peut dire de l'être est redevable d'une problématique philosophique universalisable, et enfin une relativisation du réel. Et donc une disqualification modérée de l'ontologie, sachant que l'ontologie n'est pas le discours que tiennent les mathématiques:

Le discours mathématique est un discours qui est tenu sur des questions qui se réalisent.

Dans cette structure problématologique, où prime le rapport au problème-logos, au discours sur les problèmes, les théorèmes d'existence constituent ce qu'on appellera des **noyaux de synthèse** reproductibles et décalcables, souvent organisés

comme des mixtes, au sens de Lautman, des briques de dérivation redevables d'une propriété cruciale. L'apport de la réflexion, s'il est mesuré puis comparé à des notions mathématiques instables, semblera très insatisfaisant. Ceci montre la distance qui sépare toujours la question amorphe de l'existence de ses réalisations apocritiques imprévisibles.

Bibliographie thématique

Philosophie des Mathématiques

[1] P. BOUTROUX L'idéal scientifique des mathématiciens. *Alcan*, Paris, 1920.

[2] J. BOUVERESSE Le pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel. *Minuit*, Paris, 1988.

[3] L. BRUNSCHVICG Les étapes de la Philosophie mathématique. *Alcan*, Paris, 1912.

[4] J. CAVAILLÈS Méthode axiomatique et formalisme. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, **608**, **609** et **610**. *Hermann*, Paris, 1938. Oeuvres complètes de Philosophie des Sciences. *Hermann*, Paris, 1994.

[5] G. CHÂTELET Les enjeux du mobile. *Le Seuil*, Paris, 1993.

[6] J.-T. DESANTI Les idéalités mathématiques. *Le Seuil*, Paris, 1968.

[7] G.G. GRANGER Formes, opérations, objets. *Vrin*, *Mathesis*, Paris, 1994.

[8] C. IMBERT Phénoménologies et langues formulaires. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1992.

[9] J. LARGEAULT Intuition et intuitionisme. *Vrin*, *Mathesis*, Paris, 1993.

[10] A. LAUTMAN Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, *Hermann*, Paris, 1937, 38, 39.

[11] J. PETITOT Morphogénèse du sens. *Presses universitaires de France*, Paris, 1985.

[12] J.-M. SALANSKIS L'herméneutique formelle. *Éditions du* CNRS, Paris, 1991.

[13] H. SINACEUR Corps et Modèles. *Vrin*, *Mathesis*, Paris, 1991.

[14] J. VUILLEMIN La philosophie de l'algèbre. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1993.

[15] M. WINTER La méthode dans la philosophie des mathématiques. *Alcan*, Paris, 1911.

L'être et l'existence

[1] G. DELEUZE Différence et répétition. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1972.

[2] E. GILSON L'Être et l'Essence. *Vrin*, Paris, 1948.

[3] A. HANNEQUIN *La preuve ontologique cartésienne défendue contre la critique de Leibniz*, Revue de Métaphysique et de Morale, 4 (1896), 433-458.

[4] G.W.F. HEGEL La Science de la Logique. *Trad.* P.J. LABARRIÈRE et G. JARCZYK, *Aubier Montaigne*, Paris, 1972.

[5] M. HEIDEGGER *La thèse de Kant sur l'être*, in Questions II, pp. 375-422. *Gallimard*, collection «Tel», Paris, 1996.

[6] M. HEIDEGGER *La doctrine de Platon sur la vérité*, in Questions II, pp. 423-468. *Gallimard*, collection «Tel», Paris, 1996.

[7] J. HENRIOT *Article «Existence» dans l'Encyclopédie Philosophique Universelle, Les Notions Philosophiques.* Paris, *Presses Universitaires de France*, 1990.

[8] J. HYPPOLITE Logique et existence. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1991.

[9] M. MEYER Découverte et justification en sciences. Kantisme et néopositivisme. *Klincksieck*, Paris, 1979.

[10] M. MEYER Pour une critique de l'ontologie. *Editions de l'Université de Bruxelles*, Bruxelles, 1991.

[11] E. SOURIAU Les différents modes d'existence. *Vrin*, Paris, 1943.

[12] X. TILLIETE L'intuition intellectuelle de Kant à Hegel. *Vrin*, Paris, 1995.

[13] J. WAHL Traité de Métaphysique. *Payot*, Paris, 1953.

[14] J. WAHL Vers la fin de l'ontologie. *Sedes*, Paris, 1956.

La question de l'existence mathématique

[1] A. BADIOU *Platon et/ou Aristote-Leibniz. Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'oeil du philosophe.* in [16] L'objectivité Mathématique, pp. 61-83.

[2] O. BECKER *Mathematische Existenz,* Unterschungen zur Logik und Ontologie Mathematischen Phänomene, Halle a. S. 1927. Paru aussi dans: Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenologische Forschung (1927).

[3] G. BOULIGAND *La mathématique, Science des problèmes,* Rev. génér. des Sc. **53** (1946), 118-124.

[4] G. BOULIGAND *Connaissance mathématique, idée de construction et d'existence.* Cong. Int. Phil. Math. Paris, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1137, Hermann, Paris, 1951.

[5] G. BOULIGAND *Aspects courants de la recherche mathématique, indépendants de son objet.* C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), 2689-2692.

[6] P. BOUTROUX *Sur la notion de correspondance,* Revue de Métaphysique et de morale, **12** (1904), pp. 909-920.

[7] C. CASTONGUAY, Meaning and existence in Mathematics, *Library of exact Philosophy,* Vol. 9, Springer Verlag, Berlin, 1924.

[8] C. S. CHIHARA *Existence en mathématiques,* Collection Philosophie-Mathématiques, Irem Paris Nord, 1986, 24pp.

[9] C. S. CHIHARA Constructubility and Mathematical Existence. *Clarendon Press,* Oxford, 1990.

[10] J. FAVARD *Élaboration des notions de courbe et de surface en géométrie différentielle,* Congrès International de Philosophie des Sciences, (Paris, 1949), Actualités Scientifiques et Industrielles **1137**, Hermann, Paris, 1951, pp. 37-49.

[11] A. FRAENKEL *Sur la notion d'existence dans les mathématiques,* L'Enseignement Mathématique, **34** (1935), 18-32.

[12] A. FRAENKEL *Zum Diagonal-verfahren Cantors,* Fundamenta Mathematicae, Vol. 25 (1935), 45-50.

[13] J. HADAMARD *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique,* Traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard, 1ere éd. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1959.

[14] E. LEFEBVRE *Structure et objet de l'Analyse Mathématique.* Gauthier-Villars, Paris, 1958.

[15] H. LEBESGUE *Sur l'existence des plans tangents aux surfaces applicables sur le plan,* Fund. Math. **25** (1935), 157-162.

[16] L'objectivité mathématique. M. PANZA et J.-M. SALANSKIS eds., *Masson,* Paris, 1995.

[17] N. LUSIN Les ensembles analytiques. *Gauthier-Villars,* Paris, 1930.

[18] N. LUSIN *Analogies entre les ensemble mesurables B et les ensembles analytiques,* Fundamenta Math. **16** (1930), pp. 48-76.

[19] N. LUSIN *Sur les ensembles toujours de première catégorie,* Fund. Math. **21** (1939), pp. 114-126.

[20] A.F. MONNA *Évolution des problèmes d'existence en analyse,* Collection Philosophie-Mathématiques, *n°* 22, Irem Paris Nord, 1983, 10pp.

[21] J. PETITOT *Pour un platonisme transcendantal,* in [16] L'objectivité Mathématique, pp. 147-178.

[22] J. PETITOT *Mathématique et Ontologie, in* La scienza tra Filosofia e Storia in Italia nel Novecento, F. Minazzi et L. Zanzi Éd., Rome, Istituto Poligrafico et Zecca dello Stato, 1987, pp. 191-211.

[23] J. M. SALANSKIS *Platonisme et philosophie des mathématiques* in [16] L'objectivité mathématique, pp. 179-212.

[24] R. WAWRE *Y a-t-il une crise des mathématiques? À propos de la notion d'existence et d'une application suspecte du principe du tiers-exclus.* Revue de Métaphysique et de Morale, **31** (1924), 435-470.

[25] M. WINTER *Note sur l'intuition en mathématiques* présentée au Congrès International de Philosophie (Heidelberg 1908), Revue de Métaphysique et de morale, 1908, pp. 921-925.

Logique et existence

[1] E.W. BETH L'existence en mathématiques; conférences faites à la Sorbonne au titre des échanges franco-néerlandais (1954). Collection de Logique Mathématique, Sér. A, 10. *Gauthier-Villars*, Paris, 1956.

[2] N. MOULOUD *Logique et Ontologie*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^0 20, Irem Paris Nord, 1982, 29pp.

[3] R. POIRIER Logique et modalité du point de vue organique et physique. *Hermann, Actualités Scientifiques et Industrielles*, **1163**, Paris, 1952.

[4] G. STAHL *Les questions et leur logique*, Collection Philosophie-Mathématiques, n° 38, Irem Paris Nord, 1985, 71pp.

[5] G. STAHL *Existence et non existence en logique mathématique*, Collection Philosophie-Mathématiques, n° 65 bis, Irem Paris Nord, 1990, 24pp.

Problème de Dirichlet

[1] HILBERT *Über das Dirichlet'sche Princip*, Jahresbeicht der Deutschen Mathematik Vereinigung, t. VIII (1900), pp. 184-188. Trad. M. I. Laugel, Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. XIX (1900), pp. 337-344.

[2] F. KLEIN On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals. A Supplement to the Usual Treatises. Translated by F. HARDCASTLE. *Dover*, New York, 1963.

[3] H. LEBESGUE *Sur le problème de Dirichlet*, Rendiconti del Circolo di Matematico di Palermo, **24** (1907), pp. 371-402.

[4] H. LEBESGUE *Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris, **178** (1924), 349-354.

[5] F. VASILESCO *Le problème de Dirichlet dans le cas le plus général*, L'Enseignement Mathématique, **35**, (1936), 88-106.

Géométrie algébrique et analytique

[1] J.-P. DEMAILLY *Analytic and Algebraic Geomerty*. To appear.

[2] A.M. GABRIELOV *Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions*, Invent. Math. **125** (1996), 1-12.

[3] P. A. GRIFFITHS *Poincaré and Algebraic Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, 2 (1982), 147-159.

[4] P. LELONG *Quelques remarques sur la recherche et la création des objets souples en analyse mathématique*, dans: Les grands systèmes des sciences et de la technologie, Paris, Masson, 1994, pp.461-475.

[5] H. SKODA *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série, **5** (1972), 545-579.

Géométrie symplectique

[1] M. CHAPERON *Autour du théorème de Poincaré-Birkhoff*, in Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, Collection «Travaux en cours», VI, Hermann, Paris, 1987, 1-10.

[2] *Holomorphic curves in symplectic geometry*. M. Audin and J. Lafontaine eds., *Progress in Mathematics*, **117**, *Birkhäuser*, Berlin, 1994.

[3] J. C. SIKORAV *Non existence de sous-variété lagrangienne exacte dans $\mathbf{C}^n$ (d'après Gromov)*, in Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, Collection «Travaux en cours», VI, Hermann, Paris, 1987, 95-110.

[4] S. SMALE *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math., **87** (1965), 861-866.

[5] C. VITERBO *Une introduction à la géométrie symplectique*, Gazette des mathématiciens, **54** (1992), 81-96.

Équations aux dérivées partielles et problèmes non linéaires

[1] S. ALINHAC et P. GÉRARD Opérateurs pseudodifférentiels et théorème de Nash-Moser. *Collection Savoirs Actuels, InterEditions/Editions du CNRS*, Paris, 1991.

[2] C. BARDOS *Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vires. Un exemple de l'interaction entre les mathématiques pures et appliquées*, Collection Philosophie-Mathématiques, n° 25, 1983, 14pp.

[3] M. F. BIDAUT *Théorèmes d'existence et d'existence «en général» pour des problèmes de contrôle optimal*, Paris, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris 6, 1974, 18pp.

[4] *Conférences internationales des Sciences mathématiques, organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux Équations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.* L'Enseignement Mathématique, **35** (1936), 5-151.

[5] L. HÖRMANDER *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand Company, New York, 1966.

[6] L. HÖRMANDER *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Mathematica, **113**, (1965), 89-152.

[7] L. HÖRMANDER *On the existence and the regularity of linear pseudodifferential equations*, L'Enseignement Mathématique, **17** (1971), 99-163.

[8] L. HÖRMANDER Implicit function theorems. *Lecture notes*, Stanford Univ., 1977.

[9] R. DE LAUBENFELS Existence families. *Lecture Notes in Mathematics* 1570, *Springer*, 1994.

[10] J. LERAY *Les problèmes non linéaires*, L'Enseignement Mathématique, **35** (1936), 139-151.

[11] P. LÉVY, S. MANDELBROJT, B. MALGRANGE et P. MALLIAVIN *La vie et l'oeuvre de Jacques Hadamard*, Monographies de l'Enseignement Mathématique, N^o16, Genève, 1967.

[12] B. MALGRANGE *Équations aux dérivées partielles, Conférences aux carrés*, rédigées par A. CESERO, ENS, 1966.

[13] L. NIRENBERG *Lectures on linear partial differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, **17**, AMS, Providence, 1973.

[14] L. NIRENBERG Existence theorems in partial differential equations. *Mimeographed Lecture Notes*, New York University, 1954.

[15] L. NIRENBERG and A. DOUGLIS *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. in Pure and Applied Math., **8** (1955), 503-538.

[16] J.-P. RAYMOND *Conditions nécessaires et suffisantes d'existence et de solutions en calcul des variations*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire, **4** (1987), n^o2, 169-202.

[17] M. RENARDY and R.C. ROGERS *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics **13**, Springer, Berlin, 1993.

[18] J. SCHAUDER *Über linear elliptische Differentialgleichungen Zweiter Ordnung*, Math. Zeitschrift, **38** (1933), 257-282.

Théorème de Nash-Moser

[1] S. LOJASIEWICZ and E. ZEHNDER *An Inverse Function Theorem in Fréchet Spaces*, J. Funct. Analysis, **33** (1979), 165-174.

[2] J. MOSER *A new technique for the construction of solutions of non linear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47** (1961), 1824-1831.

[3] J. MOSER *A rapidly convergent method and nonlinear partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (1966), 265-315 (I) et 499-535 (II).

[4] J. NASH *The imbedding problem for Riemannian manifolds,* Ann. of Maths. (2) **63** (1956), 20-63.

[5] F. SERGERAERT *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications,* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série, **5**, 1972, 599-660.

Références générales

[1] A. BAYET Les idées mortes. *Comély,* Paris, 1908.

[2] G. BOULIGAND Les aspects intuitifs des mathématiques. *Gallimard,* Paris, 1944.

[3] G. BOULIGAND Le déclin des absolus mathématico-logiques. *Sedes,* Paris, 1950.

[5] D. HILBERT *Pensée axiomatique,* L'Enseignement Mathématique, **20** (1905), pp. 122-136.

[6] G. KREISEL *Informal rigour and completeness proofs,* I. LAKATOS ed. Problems in the Philosophy of Mathematics. *North Holland,* 1967, pp. 138-185.

[7] H. POINCARÉ *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques,* Deuxième Congrès International des mathématiciens, (Paris 1900), 1902, p. 122 et: *La valeur de la science,* p. 22.

[8] M. KLINE Mathématiques, la fin de la certitude. Trad. J.-P. Chrétien-Goni et C. Lazzeri. *Christian Bourgois,* Paris, 1980.

[9] S. LANG Analysis II. *Addison Wesley,* 1969.

[10] M. MEYER Science et Métaphysique chez Kant. *Presses Universitaires de France,* Paris, 1988.

[11] L. ROUGIER La philosophie géométrique de Henri Poincaré. *Alcan,* Paris, 1908.