SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

FRÉDÉRIC PATRAS

Phénoménologie et mathématiques : de la logique formelle à la logique transcendantale

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1996, fascicule 5
« Phénoménologie et mathématiques », p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1996___5_A1_0>

Phénoménologie et mathématiques: de la logique formelle à la logique transcendantale*

Frédéric Patras

Dans la pratique mathématique, le décalage est manifeste entre la vérité telle qu'elle est issue de la méthode axiomatique et notre connaissance des objets mathématiques, d'abord faite d'intuitions vivantes, et qui déborde des cadres trop rigides du formalisme.

Les *Preuves et Réfutations* de Lakatos sont un bel exemple des tentatives qui ont pu être faites pour essayer de décrire le mouvement complexe de la découverte scientifique, ses aléas et sa vitalité. La philosophie de Lakatos, son "rationalisme critique" ont bénéficié d'une forte publicité ces dernières années, avec en particulier la parution de traductions de ses principaux textes. C'est d'un autre rationalisme, critique lui aussi —au sens où il s'interroge sur la possibilité et les modalités de la connaissance— qu'il va s'agir ici. Il semble donner une forme théorique à peu près achevée à certaines des ambitions de Lakatos, en permettant de comprendre la pensée mathématique telle qu'on la trouve constituée dans tel ou tel traité, donc formalisée, sans perdre de vue que cette pensée, avant de se figer en théories, commence par naître dans notre intuition et cela, non pas de manière arbitraire, mais conformément à une certaine logique, qui est celle du développement de la pensée mathématique.

Plus précisément, il va être question de la phénoménologie husserlienne, que nous aborderons dans une perspective historique à travers son mode de constitution au sein de la tradition épistémologique.

Dans un deuxième temps, nous nous écarterons des interprétations classiques de Husserl pour parler de l'architecture interne de sa phénoménologie, où plusieurs grandes directions peuvent être distinguées pour ce qui est de

*Texte d'une intervention au séminaire de Philosophie et Mathématiques (E.N.S), le 25 Novembre 1996.

la philosophie mathématique. Nous verrons alors comment trouver dans certaines des options fondamentales de la théorie husserlienne les matériaux d'un rationalisme capable de rendre compte à la fois des rigidités axiomatiques du discours mathématique organisé et de la vie et du mouvement qui animent le travail du mathématicien.

1 La doctrine kantienne

Il faut d'abord revenir aux origines de la tradition: à la doctrine kantienne de l'entendement, car c'est à partir des concepts qu'elle met en place que va s'organiser, consciemment ou non, le débat épistémologique moderne.

La critique kantienne s'intéresse d'abord à la possibilité de connaissances pures *a priori*, c'est à dire indépendantes et en un sens antérieures à toute expérience -comme le sont les mathématiques, exemple idéal de connaissances pures.

Les premières connaissances *a priori* en droit sont celles qui conditionnent la possibilité même de toute connaissance: à savoir, les règles universelles et nécessaires de l'entendement, c'est à dire la logique générale en tant que science de la forme de la pensée en général. Pour ce qui nous intéresse, le point essentiel de la conception kantienne est que la logique en ce sens est purement formelle, c'est à dire qu'elle est pure science des règles de l'entendement, incapable de dire jamais quoi que ce soit sur le contenu ou la matière des pensées. En particulier, il va être impossible de reconduire les mathématiques, qui sont une science d'objets et se réfèrent à des contenus de connaissance, à la logique générale ou formelle.

Face à la logique générale, qui est donc un simple "art universel de la raison", Kant développe une "logique transcendantale" qui est une logique du rapport de la pensée à ses objets -plus précisément, et dans les termes kantiens, la logique transcendantale est une théorie de la manière de connaître des objets en tant que cela est possible a priori. A côté d'une logique des règles et des formes de l'entendement, naît donc l'idée d'une logique des rapports de la connaissance à ses objets, ces rapports étant susceptibles de descriptions systématiques pures.

Si les mathématiques ne sont pas de pures règles formelles de l'entendement plus ou moins tautologiques mais permettent de connaître des objets, si l'on peut parler de contenus de connaissance mathématique par delà l'exactitude formelle, on a envie de penser que Kant va fonder la possibilité de connaissances mathématiques dans la logique transcendantale, puisque celle-ci permet, contrairement à la logique générale, d'aborder la question du statut et de la nature des contenus de conscience. Or, de manière assez surprenante, il n'en est rien: c'est que pour Kant les mathématiques ne sont pas de prime abord une science de concepts, mais une science d'intuitions pures, reconductible en tant que telle aux formes pures de la sensibilité plutôt qu'à celles de l'entendement. D'où l'aspect assez paradoxal pour nous de la théorie kantienne, qui fait de la géométrie ou de l'arithmétique les sciences des formes pures de l'espace et du temps.

On sait que l'épistémologie kantienne a été largement battue en brèche au cours du XIX-ième siècle, en particulier parce que cette reconduction des mathématiques aux formes pures de l'espace et du temps reposait implicitement sur l'identification de l'espace sensible à l'espace euclidien tridimensionnel, identification qui n'allait plus être tenable avec la découverte des géométries non-euclidiennes et leur développement systématique. C'est cette identification qui permettait à Kant de défendre l'idée clé de sa doctrine mathématique: le fait que les jugements mathématiques ne sont pas analytiques, comme ce serait le cas dans une théorie formelle ou axiomatique de la vérité, mais bien synthétiques a priori. Cela le conduit à affirmer:

"C'est une proposition synthétique que celle-ci: entre deux points la ligne droite est la plus courte. Car mon concept du droit ne contient rien qui se rapporte à la quantité: il n'exprime qu'une qualité. Il faut donc ici encore recourir à l'intuition: elle seule rend possible la synthèse."

Il est facile de voir rétrospectivement les défauts de ce type d'analyses: la thèse kantienne n'est techniquement plus tenable dès que l'on sait que l'espace n'a aucune raison d'être euclidien. L'épistémologie kantienne doit donc renoncer, avec la découverte de nouvelles géométries, à une de ses thèses fondamentales: la possibilité de fonder les mathématiques dans l'esthétique et de les envisager comme formes pures de la sensibilité. On sait comment, après Kant, va se développer la branche dominante de la philosophie mathématique: les problèmes de fondement vont être ramenés à des problèmes concernant la logique générale et ses extensions: théorie des ensembles, théories axiomatiques, théorie des types, etc... Les jugements mathématiques qui, chez Kant, étaient synthétiques a priori et renvoyaient à la sensibilité et à l'intuition allaient donc devenir via les diverses axiomatisations, des jugements analytiques.

Il reste tout de même à déterminer s'il n'y a rien à sauver dans le naufrage de l'épistémologie kantienne et en particulier si, pour élaborer une théorie satisfaisante des fondements, il faut à tout prix renoncer à reconnaître le rôle fondateur et synthétique de l'intuition dans la pratique mathématique.

Plus précisément, si après Kant il est impossible de fonder les mathématiques dans l'esthétique, dans les formes pures de la sensibilité, on peut tout de même refuser de les fonder exclusivement dans la logique formelle —cela par souci de réalisme, parce que la logique formelle ne rend pas compte de la vie assez mystérieuse de la pensée qui se manifeste dans le travail mathématique. La question se pose alors de déterminer s'il ne serait pas possible de bâtir la science mathématique sur le terrain d'une logique transcendantale, en un sens à redéfinir mais assez proche de l'option kantienne pour en conserver au moins deux traits fondamentaux:

—premièrement cette logique transcendantale devrait être susceptible de conduire à des connaissances certaines et aprioriques -ce qui est nécessaire si, conformément à un choix rationaliste, on refuse de faire des mathématiques une science empirique.

—deuxièmement, elle devrait être une logique du rapport à l'objet en un sens très large, ce qui permettrait de parler d'objets et de concepts mathématiques, donc d'intuitions et de contenus de conscience, sans avoir à recourir à une théorie sensible de l'intuition du type de l'Esthétique kantienne.

Nous verrons que Husserl a exploité cette possibilité d'édifier une épistémologie post-kantienne, quitte à modifier substantiellement les grandes options du kantisme tout en restant sur le terrain d'une philosophie transcendantale, c'est à dire d'une philosophie qui s'intéresse au problème de la constitution des objets et des concepts.

La théorie husserlienne semble à ce jour la seule qui permette d'affronter le problème clé de l'épistémologie mathématique contemporaine, à savoir, comment les mathématiques peuvent tout à la fois et sans contradictions être une science axiomatique susceptible de descriptions formelles et simultanément, dans le travail du mathématicien, une science d'intuitions -ces intuitions pouvant être très diverses, de l'intuition spatiale classique qui nous permet de traiter certains objets physiques comme représentants qualifiés de concepts purs, à des formes plus abstraites de l'intuition -comme celle portant sur les structures algébriques ou les espaces abstraits de la topologie.

2 L'analytique frégéenne

Dans le dépassement du kantisme qui s'opère avec la mise en place des différentes axiomatisations de la géométrie et de l'arithmétique, l'oeuvre de Frege marque un tournant décisif, y compris dans sa signification ultérieure pour la phénoménologie. Dans les *Fondements de l'Arithmétique*, Frege met en place la construction du concept de nombre via la théorie des ensembles, ce qu'il revendique explicitement comme le passage décisif de la théorie kantienne à une théorie "analytique" des jugements mathématiques.

Consciemment ou non, tous les travaux d'axiomatisation de Hilbert à Russell présupposent qu'a été accompli au niveau philosophique la réduction frégéenne des mathématiques à une science analytique et donc susceptible de descriptions formelles. Pourtant, la place de Frege est très particulière en cela que le vocabulaire et les références philosophiques frégéennes dans les *Fondements de l'Arithmétique* sont encore explicitement kantiens, et Frege semble bien plutôt concevoir son oeuvre comme un dépassement que comme une remise en cause du kantisme.

D'un point de vue purement technique, une analyse superficielle semble indiquer qu'il ne fait rien d'autre qu'une axiomatisation ensembliste de la numération. Frege décrit un nombre comme classe d'équivalence d'ensembles finis pour les relations de bijection, si bien que le seul concept requis pour fonder l'arithmétique semble être celui de relation d'équivalence, qui relève de la logique générale. Les vérités mathématiques, en tant qu'elles relèvent désormais de la logique générale seraient donc analytiques, idée étayée par les progrès ultérieurs de la formalisation.

Pourtant les analyses frégéennes ne peuvent être réduites à cette relecture "logiciste" de son oeuvre. Il faut revenir au vocabulaire employé pour comprendre ce que signifie pour lui le tournant analytique qu'il fait prendre à la philosophie mathématique. Un nombre est d'abord pour lui "l'étendue d'un concept" (der Umfang eines Begriffes); un nombre est ce que recouvre la notion de classes d'équivalence bijectives d'ensembles finis, et cette définition n'est pas d'emblée pour Frege purement formelle comme elle le deviendra avec la théorie des ensembles, mais plutôt intensive: définir le concept de nombre, du point de vue de la conscience, c'est avoir en vue un certain champ de situations où ce concept fait sens, où des objets viennent se ranger sous ce concept. Définir un nombre semble donc un acte plutôt synthétique qu'analytique, puisque ce concept est abstrait d'une relation entre objets.

Si on lit Frege en faisant abstraction des schémas de pensée modernes, en revenant donc aux textes et aux concepts mêmes qu'il emploie, il semble donc que l'on aboutisse à une contradiction: d'un côté il revendique explicitement le caractère analytique —purement logique au sens de la logique formelle— de son "axiomatisation" ensembliste du nombre, de l'autre il construit ce concept en termes d'"extension de concepts", donc en termes qui semblent bien renvoyer à un mode de constitution synthétique du nombre.

Frege est tout à fait conscient de ce paradoxe et lui donne une solution qui va se révéler assez proche des analyses husserliennes ultérieures. L'idée est simple: ce n'est pas parce que certaines conditions subjectives sont requises pour que nous puissions donner une définition que celle-ci est pour autant à reconduire à la subjectivité. En d'autres termes, ce n'est pas parce que la construction du concept de nombre requiert l'intuition d'objets que l'on va penser comme éléments de classes d'équivalence, que le concept de nombre en tant que tel n'a pas pour autant une nécessité a priorique et ne vaut pas comme forme pure de l'entendement. En termes frégéens: "la vérité d'un énoncé ne coïncide pas avec ce qui est pensé en lui".

En faisant cette remarque, Frege touche mais passe à côté de ce qui va être au coeur de la problématique phénoménologique: à côté de la logique de la vérité apparaît une logique de "ce qui est pensé", une logique des contenus de conscience, logique transcendantale en un sens qui n'est plus le sens kantien. Même si les énoncés mathématiques sont des vérités indépendantes de toute expérience, même si l'on admet qu'indépendamment de toute conscience qui les pense, les vérités mathématiques continueraient d'exister de toute éternité, il n'en reste pas moins que, pour que notre entendement puisse les concevoir, il lui faut les construire dans une intuition. Si faire des mathématiques signifie concrètement produire des vérités, donc aussi des textes formalisés et axiomatisés, penser les mathématiques du point de vue de la philosophie signifiera en revanche chercher à comprendre l'activité qui conditionne cette formalisation. Cela signifiera décrire de manière rigoureuse l'organisation des vécus de conscience du mathématicien construisant une théorie.

3 L'approche phénoménologique

Lorsque Husserl entre en philosophie, il est assez loin de se poser des questions de fondements mathématiques en les termes assez kantiens de l'opposition entre logique formelle et logique transcendantale. Il a une solide formation mathématique, puisqu'il a eu l'occasion de travailler avec Weierstrass et soutenu en 1882 un travail sur le calcul des variations.

Il va s'intéresser, comme Frege, mais sous l'influence probable de Weierstrass, au problème de la constitution du concept de nombre, qui est à ce moment-là de la philosophie mathématique le problème central -on a vu que c'est en bonne partie sa résolution dans un sens analytique qui va faire basculer les intérêts de tout un pan de la philosophie mathématique vers les problèmes d'axiomatisation. Pourtant Husserl vient d'un horizon philosophique particulier: il a suivi les leçons de Brentano, ce qui le conduit d'abord dans sa thèse sur la *Philosophie de l'Arithmétique* à rechercher une fondation psychologique du concept de nombre.

Le texte de la *Philosophie de l'Arithmétique* est un texte de jeunesse, d'accès délicat, non pas tant à cause de la difficulté des descriptions effectuées, mais plutôt parce qu'il est difficile d'en deviner les ressorts épistémologiques: il y a dans tout le texte des directions de recherche qui émergent comme problèmes sans que les réponses qu'apporte Husserl soient jamais définitives. Il va d'ailleurs se détourner assez vite de ce premier essai, d'inspiration beaucoup trop psychologique au regard de l'idéalisme transcendantal qui caractérisera ultérieurement sa philosophie. Pourtant, cette étude du concept de nombre avec laquelle il entre dans la recherche philosophique va conditionner sa pensée ultérieure, car elle va lui permettre de toucher du doigt un certain nombre de phénomènes que l'épistémologie ne peut négliger.

Admettons pour l'instant que les concepts mathématiques soient des Idées en un sens platonicien. Même sous cette hypothèse toute métaphysique, on peut s'interroger sur la manière dont notre conscience manipule et fait vivre ces concepts lorsqu'elle doit appréhender le réel. Il y a là un phénomène premier et irréductible: notre conscience est toujours conscience de quelque chose; elle est tournée vers des objets -que ces objets soient des objets spatio-temporels ou des objets abstraits comme le sont les souvenirs ou, sur un autre mode, les objets mathématiques. La conscience est donc tournée vers les objets; elle vise toujours quelque chose et ce fait pour la conscience d'être toujours dirigée vers quelque chose a un nom philosophique: l'intentionalité.

L'intentionalité est la découverte majeure de Brentano, et Husserl va en tenir compte dans ses manipulations des concepts de l'arithmétique. Il se rend vite compte que la psychologie est quelque chose de beaucoup trop subjectif pour fonder en droit les concepts de la numération -Husserl est profondément rationaliste et veut que ces concepts puissent être décrits de manière apriorique et objective. Pourtant il voit bien qu'il y a un résidu de sens incontournable dans les description intentionnelles qu'il est conduit à faire —descriptions intentionnelles, c'est à dire, dans la *Philosophie de l'Arithmétique*, descriptions d'états de conscience en tant que notre conscience est conscience de quantités, de collections d'objets, de "relations collectivisantes".

Husserl retiendra donc ceci de son étude de l'arihmétique: s'il n'est pas clair qu'une analyse intentionnelle permette de fonder les mathématiques, il n'en reste pas moins que les structures de l'intentionalité ont quelque chose à nous dire sur les mathématiques et une épistémologie conséquente ne peut se contenter de rendre compte des théories ou des objets mathématiques, elle doit aussi prendre en considération le rapport que notre conscience a à ces objets. Le pari fondamental de la phénoménologie sera d'affirmer que des connaissances pures, aprioriques, sont possibles non seulement quant aux objets, mais aussi quant à l'intentionalité de la conscience mathématique, quant au rapport que nous avons en tant que mathématiciens aux objets que nous manipulons, quel que soit par ailleurs le degré d'abstraction de ces objets.

On voit toute la révolution qu'opère la phénoménologie relativement aux analyses de Frege dans ses *Fondements de l'Arithmétique.* Chez Frege, il y a deux moments dans la constitution du concept de nombre: notre conscience est d'abord conscience d'objets, elle peut former le concept d'équivalence bijective et de classes d'équivalences bijectives. L'extension du concept de classes d'équivalences bijectives ainsi obtenu donne le concept de nombre qui acquiert aussitôt une existence apriorique et idéale, indépendamment de la façon dont ce concept a été forgé. Nous avons donc une connaissance certaine des nombres et, par extension, des concepts mathématiques, mais la façon dont nous formons ces concepts, dont nous en prenons conscience est pour ainsi dire effacée chez Frege une fois le concept construit, un peu comme lorsque dans une démonstration on efface les calculs auxiliaires pour ne conserver que l'essence de la preuve.

Avec Husserl, notre connaissance a la possibilité de s'étendre des objets aux structures de la conscience en tant qu'elle est conscience de ces objets. A la logique formelle et axiomatique va donc se juxtaposer une logique génétique, logique de notre rapport aux objets mathématiques, logique transcendantale en un sens nouveau, beaucoup plus étendue que la logique transcendantale kantienne.

4 La *"Crise des Sciences Européennes"*.

Il s'est agi jusqu'ici de décrire à grands traits l'enracinement du projet phénoménologique dans la tradition épistémologique. Reste à voir comment ce projet va être mis en oeuvre par Husserl. Pour cela il faut en passer par l'interprétation classique de sa philosophie, que l'on retrouve chez des auteurs aussi différents que Cavaillès dans son texte *Sur la Logique et la Théorie de la Science* ou Derrida, dans son commentaire fameux du texte de Husserl: *l'Origine de la Géométrie.*

Cette interprétation est solidement étayée par la plupart des textes de Husserl portant explicitement sur les problèmes de fondements. En particulier, il semble bien qu'elle corresponde à l'auto-interprétation que Husserl donne de sa philosophie dans ce qui est son texte phare du point de vue de la théorie de la science, à savoir la *Crise des Sciences Européennes et la Phénoménologie Transcendantale.*

Dans un premier temps je vais revenir sur cette interprétation, très importante, car elle a contribué à donner une image de la philosophie husserlienne orientée prioritairement sur le "monde de la vie" et ses intuitions spatio-temporelles, en négligeant toute l'élaboration théorique sans laquelle les références husserliennes au "monde de la vie" perdent en grande partie leur sens.

Une remarque en passant, c'est que cette interprétation correspond à des idées très en vogue, en particulier celle-ci qu'il faut absolument revenir, pour comprendre et enseigner les mathématiques, à nos intuitions spatio-temporelles, ce qui est précisément la caricature d'un thème husserlien. Typiquement, Michel Serres, dans un livre récent sur les *Origines de la Géométrie*, dont le titre reproduit un titre husserlien, redéveloppe cette thématique du retour nécessaire au "monde de la vie". En bref, Husserl continue de hanter quoique de manière inconsciente ou tacite toute une partie de l'activité éditoriale contemporaine!

La *Crise des Sciences Européennes et la Phénoménologie Transcendantale* est une interrogation sur la perte de sens des sciences pour l'homme dans la société moderne -une interrogation d'apparence très existentielle. Husserl remarque que les mathématiciens manipulent des concepts toujours plus formels, dont la signification semble s'épuiser dans leur contenu purement signitif et symbolique.

Dans le paragraphe de la *Crise des Sciences Européennes* qui porte sur le mathématisation galiléenne de la nature -probablement un des plus beaux textes jamais écrits sur le problème du sens intuitif des structures algébriques formelles, Husserl revient sur le premier moment de constitution des idéalités géométriques. Il suit exactement le même mouvement que Frege, lorsque celui-ci dégageait les moments de constitution du concept de nombre.

Le fait premier pour notre conscience, avant d'être théorique et abstraite, est d'être conscience du monde extérieur, du monde spatio-temporel. C'est à partir de nos intuition spatiales, comme celle des ronds ou des boules que, par un processus limite, nous pouvons atteindre aux concepts idéaux que sont les cercles ou les sphères de la géométrie euclidienne.

Une mutation du sens intuitif de la géométrie va intervenir lorsque, après Viète et Descartes, on va donner un modèle algébrique à ces concepts limites, lorsqu'on va traduire en formules algébriques des relations entre idéalités spatiales. Dès lors que ce premier mouvement d'idéalisation symbolique est accompli, le contenu intuitif de la géométrie est perdu de vue -tous ceux qui ont lu des traités modernes de géométrie savent combien il est difficile, au moins au début, d'avoir une intuition du sens d'un énoncé ou d'une définition algébrique formelle.

Husserl va très loin dans sa dénonciation du caractère algébrique et formel de la géométrie contemporaine puisqu'il récuse déjà la géométrie de Galilée:

> *"Galilée était déjà, du point de vue de la pure géométrie, un héritier. La géométrie qu'il hérita, avec une façon "intuitive" d'imaginer et de démontrer n'était déjà plus elle-même la géométrie originelle; elle était déjà, dans cette intuitivité même, vidée de son sens."*

La pensée mathématique s'est construite par abstractions successives, par paliers conceptuels, par idéalisations. Pour donner sens aux mathématiques contemporaines, il faudrait donc selon le Husserl de la *Crise des Sciences Européennes* déconstruire pierre à pierre l'édifice des mathématiques et repérer comme tel chacun des moments du processus d'abstraction, jusqu'à ce que nous soyons reconduits à un système de proto-idéalités fondées comme concepts limites dans notre intuition du "monde de la vie" -c'est à dire dans notre intuition spatio-temporelle.

On voit que l'on est presque revenu aux mathématiques formes pures de l'espace et du temps de l'Esthétique transcendantale kantienne. Mais cette déconstruction n'a pas de sens. Le progrès mathématique n'a pas cette linéarité que lui attribue Husserl. On le voit sur un exemple élémentaire comme celui des groupes. On peut par exemple aborder la théorie des groupes à partir des permutations d'un ensemble fini, d'où on abstrait la notion générale de groupe. On peut ensuite utiliser ce concept dans des situations géométriques, par exemple en étudiant des groupes de transformation. Si l'on suivait Husserl, il faudrait dire que l'intuition arithmétique est, dans cette situation, plus fondamentale que l'intuition géométrique puisque nous sommes partis d'un concept arithmétique: celui d'ensemble fini. Mais on voit bien que l'on aurait pu aussi bien suivre le chemin inverse et construire le concept de groupe à partir de la géométrie pour le mobiliser ensuite seulement dans des situations arithmétiques.

. On retrouve ici l'argument de Frege: une fois les idéalités mathématiques constituées, elles prennent une existence en droit et deviennent indépendantes des moments de leur constitution. Une fois le concept de nombre constitué, il est à notre disposition dans un mode d'évidence conceptuelle propre, sans qu'il soit nécessaire de le reconduire à quelque intuition primordiale que ce soit.

En ce sens, la philosophie n'a rien à dire sur le contenu des concepts mathématiques car le sens des idéalités mathématiques appartient en propre au mathématicien et chercher à les décrire à l'extérieur de la pratique mathématique n'a pas de sens.

5 Vers une épistémologie intentionnelle.

Le projet phénoménologique est-il pour autant caduc? Peut-être pas si l'on relit Husserl globalement -en particulier à partir de textes comme les *Méditations Cartésiennes.*

La question qui reste posée aujourd'hui, après Frege et après l'axiomatisation, est d'élaborer une théorie de la découverte qui rende compte du mouvement réel de constitution de la pensée mathématique, pensée vivante, discours sur des contenus et non forme pure plus ou moins tautologique. Mais cette théorie, on vient de le voir, ne peut se contenter de nous renvoyer sans autre à de prétendues intuitions fondamentales, comme celle de l'espace. De plus, elle doit pouvoir nous dire comment notre connaissance est susceptible d'accroissement, comment de nouvelles idées, de nouveaux concepts peuvent apparaître. En bref, elle doit pouvoir nous dire comment le progrès est possible sans se réfugier dans le confort de la science déjà constituée et formalisée.

La phénoménologie —et, plus généralement, la philosophie— n'a, on l'a vu, rien à nous dire sur le contenu des concepts mathématiques. Ce qu'elle peut tenter d'expliquer, c'est comment ces concepts apparaissent dans le travail du mathématicien, c'est à dire comment ils apparaissent dans des vécus de conscience.

Les objets en général sont neutres et sans signification; leur donne sens le regard que nous portons sur eux. C'est vrai pour les objets de la vie courante qui prennent sens à partir de l'usage que nous faisons d'eux; c'est vrai pour un livre, un tableau ou une symphonie que nous appréhendons comme des noyaux de sens de façon très variable en fonction de notre culture. Ce sera vrai aussi pour les concepts et les énoncés mathématiques: le sens qu'ils ont pour nous, qu'il faut soigneusement distinguer avec Frege de leur teneur de vérité, ce sens tel qu'il apparaît dans la science vécue est conditionné par la forme de notre rapport à eux.

Notre conscience a deux moments duaux: le premier est celui de l'objet, il correspond au fait qu'un objet est donné à chaque fois que notre conscience est conscience de quelque chose. Le second moment correspond à la forme pure du vécu de conscience, abstraction faite de l'objet, il correspond à la structure de notre visée de l'objet. Pour donner un exemple qui a ses limites mais vaut tout de même comme une bonne indication: supposons que je pense à l'ensemble des groupes finis et des morphismes entre ces groupes et que je décide de faire abstraction du concept de groupe: il reste comme résidu cette idée que ma conscience peut être dirigée vers des objets ayant un certain type de relations entre eux. Avec un peu de travail, je peux dériver de cette idée des notions comme celle de catégorie, qu'à leur tour je pourrai traiter comme des objets, mais dont on voit bien comment elles ont été abstraites d'un certain type de structure de l'intentionalité, de la structure de notre rapport à certains objets -dans l'exemple donné, les groupes et leurs morphismes.

Finalement, comme la peinture, l'histoire ou la musique —quoique sous des modalités différentes—, les mathématiques sont une formation culturelle au sens où avoir des connaissances mathématiques ce n'est pas seulement avoir des connaissances factuelles mais c'est aussi être capable d'appréhender de manière complexe un certain nombre de phénomènes.

Reprenons encore une fois l'exemple des groupes: il y a d'une part l'objet "groupe abstrait", idée parfaite et clôturée. Si on montre la définition d'un groupe à un non mathématicien, il y verra avec le Husserl de la *Crise des Sciences Européennes*, une pure forme dépourvue de sens intuitif, la dissolution de la pensée dans une technique pure et sans intuitions. Mais la définition formelle n'épuise pas la signification d'un concept: lorsqu'un mathématicien va penser "groupe", il va penser aux différentes spécialisations possibles du concept, aux résultats généraux qu'il connaît, aux problèmes non résolus en théorie des groupes, aux différentes variations possibles à partir de la notion de groupe. En d'autres termes, la pensée d'un objet est plus que la simple représentation distincte de cet objet -il y a en elle tout un système de renvois que Husserl appelle très joliment la structure d'horizon de l'intentionalité.

On voit tout de suite ce que cela signifie pour l'enseignement: on critique souvent la méthode doctrinale en réclamant un enseignement plus intuitif, l'intuition étant comprise sur un mode très naïf et esthétisant. On se trompe une fois de plus sur la nature des mathématiques, qui ne sont pas une science d'intuitions au sens de l'esthétique, mais une science de concepts. Former aux mathématiques, ce n'est donc pas revenir à l'enseignement de la géométrie euclidienne, mais faire comprendre que les structures algébriques ont un sens seulement via leur insertion dans un système de renvois conceptuels. Bref, un bon enseignement est un enseignement dogmatique, où l'on donne des exemples et où l'on fait faire des exercices.

Pour ce qui est de résoudre des problèmes, cela signifie d'abord être capable de mobiliser un système de renvois conceptuels. On peut encore parler d'intuitions mathématiques à propos de ces systèmes, mais il faut comprendre que ce dont il s'agit alors excède largement l'intuition au sens naïf. L'intuition dont il s'agit désormais ne porte pas directement sur les objets mathématiques mais traduit la richesse de l'architecture des vécus de conscience, l'étendue de la structure d'horizon associée à notre perception de tel ou tel objet mathématique.

Finalement, être capable d'intuitions signifie être capable de distinguer dans nos vécus de conscience, dans notre visée des objets, des formations typiques. C'est la mise en forme de ces formations typiques dans le langage qui produira des résultats, des idées nouvelles. En bref, c'est dans la structure des vécus de conscience des mathématiciens qu'il faut chercher les raisons des progrès qualitatifs de la connaissance.

Pour conclure, faire des mathématiques signifie travailler sur certains objets en essayant de dégager des significations nouvelles. Le lieu où ce travail s'accomplit n'est pas l'objet mathématique lui-même, qui est en un certain sens neutre, mais notre conscience de l'objet. C'est en elle qu'il faut détecter des structures régulières si l'on veut mettre en place une philosophie mathématique vivante. Certaines de ces structures renvoient à la logique classique, mais d'autres la débordent. L'idée de déformation par exemple n'est pas susceptible d'être décrite en termes formels dans toute sa généralité, et c'est pourtant une idée essentielle. On peut bien sûr faire telle ou telle théorie mathématique de la déformation —la théorie de l'homotopie en est sans doute le plus bel exemple—, mais on ne parviendra jamais à formaliser toute la richesse de l'idée même de déformation. On peut dresser une liste très partielle de ce que j'appellerai les structures opératoires de l'intentionalité: déformation, transformation, extension, passage à la limite, passage au local ou au global.

On voit qu'il y a là tout un travail à accomplir pour une philosophie intentionnelle —en un sens qui n'est peut-être plus tout à fait celui de la phénoménologie husserlienne: élaborer une typique de ces structures opératoires. Je crois que les mathématiciens auraient beaucoup à gagner à un tel travail.