Séminaire de philosophie et mathématiques

Guy Wallet

Signification et démonstration

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1992, fascicule 8
« Démonstration et signification en mathématiques », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1992___8_A1_0>

SIGNIFICATION ET DEMONSTRATION

Guy Wallet

automne-hiver 1992

1 Introduction

Lors d'une étude précédente[10], j'ai entrepris un travail de critique d'une position philosophique, à propos des mathématiques, qui me paraît dominante et que je nomme aujourd'hui *l'objectivisme*. J'entends par là le point de vue qui consiste à vouloir rendre compte de l'apparente objectivité des mathématiques par l'existence de "quelque chose" précédant et guidant la pratique habituelle et "naïve" du mathématicien, ce quelque chose pouvant être, au choix selon les écoles de pensée : un objet référentiel, une intuition transcendentale, un texte formalisé parfait ou encore des universaux logiques (cette liste n'est certainement pas exhaustive). Le nombre π et la suite de ses décimales m'avaient alors servi de guide, avec comme point de départ, le "démontage philosophique" d'une pseudo-expérience sur l'objectivité de ce nombre. Au delà du détail des arguments, ma remarque fondamentale était qu'une propriété mathématique démontrée n'est plus susceptible d'être mise en cause par un dispositif expérimental. Il en découle que les "objets mathématiques" et leurs "propriétés" manifestent une objectivité d'une autre nature que celle qui caractérise le monde réel des faits. La raison en est qu'une propriété mathématique est obtenue au terme d'une démonstration et que, le propre d'une démonstration, dans l'usage que nous en faisons nous les hommes, est d'exclure du doute de manière radicale sa conclusion. Autant dire que les mathématiques ne sont pas objectives au sens habituel de ce terme mais qu'elles sont *normatives* : les mathématiciens définissent et enrichissent *l'essence* du langage, collection des points fixes grammaticaux à partir desquels peuvent se déployer les formes descriptives de notre discours. Pour ma part, j'utilise les termes *objet-mathématique* et *propriété-mathématique* en insistant sur le sens inhabituel et indécomposable de ces expressions.

Cependant, l'abandon de la vision objectiviste des mathématiques pose, en particulier, un problème relatif à leur sémantique : s'il est vrai qu'une proposition mathématique est sans référent extérieur, d'où lui vient son sens ? Dans ce travail, je me propose d'insister sur *le lien de signification qui unit une proposition mathématique à sa démonstration*. A ce propos et comme dans le travail précédent, mon point de vue est fortement inspiré par celui du philosophe contemporain Wittgenstein. Au fil de mes lectures[1], je continue à trouver dans l'œuvre de ce penseur des analyses d'une clairvoyance et d'une modernité étonnantes qui, je crois, peuvent permettre aux mathématiciens de mieux comprendre certains

[1]Les textes fondamentaux de Wittgenstein et les analyses de son œuvre cités dans la bibliographie.

aspects de leur pratique actuelle. Toutefois, je ne prétends nullement être fidèle à une quelconque orthodoxie dont certains experts[2] seraient les garants. Mon unique but est de participer, dans des formes qui n'engagent que moi, à un débat actuel sur la philosophie des mathématiques. Eloigné de tout souci d'érudition philosophique, je le fais en tant que mathématicien, convaincu qu'une réflexion fondamentale pourrait entraîner une mise en cause de certains dogmes derrière lesquels notre science a cru bon de s'abriter depuis la deuxième moitié du 19-ème siècle.

2 Propositions et démonstrations sont inextricablement liées

Dans l'usage commun du discours descriptif, il est naturel de séparer nettement le contenu d'une proposition des moyens qui permettent de la vérifier. Si j'affirme qu'il pleut, j'exprime une propriété objective qui est pensée comme étant indépendante de la procédure par laquelle je me suis préalablement assuré qu'effectivement c'est le cas. L'une des manifestations les plus fréquentes de l'objectivisme en mathématique consiste à reproduire le même schéma à propos d'une proposition et de sa démonstration. Insidieusement, on est amené à attribuer un contenu objectif à une proposition mathématique et à ne voir dans l'une de ses démonstrations qu'un moyen de sa vérification. Outre le fait que cette conception est un prolongement naturel d'une caractéristique du discours descriptif usuel, elle est renforcée par "l'évidence" selon laquelle une "même" proposition est susceptible d'être prouvée selon des méthodes radicalement différentes. Cette idée est largement partagée par les mathématiciens et bien peu la mettent en cause. Par exemple, on est naturellement amené à considérer le théorème de la valeur intermédiaire

> *Pour toute fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)f(1) < 0$, il existe $x \in [0,1]$ vérifiant $f(x) = 0$*

comme étant la transcription d'une propriété objective des fonctions continues indépendante des diverses démonstrations permettant de la vérifier.

Certaines formes de platonisme que je qualifierais volontiers de mystiques, vont même jusqu'à attribuer à la faiblesse et à la finitude de l'esprit humain la nécessité qui est la nôtre d'utiliser des moyens démonstratifs pour accéder à la vérité, alors qu'un esprit infiniment supérieur pourrait se passer de ces misérables béquilles... Voici le paradoxe : alors qu'elle constitue la part essentielle de notre travail quotidien de mathématicien, la démonstration se voit attribuer, par ce type de représentation philosophique, un rôle annexe et subalterne de bien faible poids relativement à l'énoncé pur et rayonnant des vérités éternelles.

Pour progresser, il peut être intéressant de considérer un premier exemple simple mais révélateur d'une proposition mathématique et de sa justification. Soit donc la proposition $\mathcal{P}$

> *Il existe deux nombres irrationnels α et β tels que α^β soit un nombre rationnel.*

[2] Que penserait Wittgenstein de ces spécialistes, lui qui expliquait avoir abandonné en 1947 sa chaire de philosophie "parce qu'il n'y a que deux ou trois de mes étudiants en philosophie dont je n'ai pas connaissance de leur avoir fait un mal quelconque" ?

La plupart d'entre nous lisons $\mathcal{P}$ comme étant porteur d'un contenu évident, non ambigu, et nous reproduisons à ce propos la position qui est la nôtre face à un énoncé descriptif du type

Il y a une pomme et une noix dans ce panier.

Or, une démonstration possible de $\mathcal{P}$ est constituée par le texte $\mathcal{D}$ suivant

Si $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ *est rationnel, il suffit de prendre* $\sqrt{3}$ *pour* α *et* $\sqrt{2}$ *pour* β.
Sinon, on pose $\alpha = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{2}$ *et on obtient* $\alpha^{\beta} = 3$.

Cette preuve $\mathcal{D}$ est logiquement irréprochable pour un mathématicien classique et, à certains égards, on pourrait la qualifier d'élégante tant elle est brève et cinglante. Cependant, il me semble que pour celui qui comprend $\mathcal{P}$ comme une proposition descriptive, la justification $\mathcal{D}$ a pour le moins un aspect frustrant. Il est clair que ce jeu de langage a bien peu à voir avec la vérification de l'existence d'une pomme et d'une noix dans un panier. Si l'on tient absolument à préserver le caractère descriptif de $\mathcal{P}$, il y a certainement tromperie sur la marchandise et on peut chercher, au choix, soit une autre démonstration de $\mathcal{P}$ soit une nouvelle proposition dont $\mathcal{D}$ serait une vérification plus acceptable. Par exemple, un intuitionniste pourrait déduire de $\mathcal{D}$

$\bar{\neg}$*(Pour tout couple* (α, β) *de nombres irrationnels,* α^{β} *est un nombre irrationnel).*

où $\bar{\neg}(\mathcal{A})$ désigne la négation intuitionniste de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'implication effective $(\mathcal{A} \Rightarrow (0 = 1))$.

Il n'en reste pas moins que pour l'immense majorité des mathématiciens, $\mathcal{D}$ est une démonstration satisfaisante de $\mathcal{P}$, et, contrairement à l'école intuitionniste, je n'ai pas le désir de réformer la notion commune de preuve. Est une démonstration ce que nous appelons habituellement comme tel, un point c'est tout. Quelle leçon peut-on tirer des constatations précédentes ? Pour ma part, le point de vue selon lequel *une part importante de la signification d'une proposition est dévoilée par sa démonstration* me paraît singulièrement éclairer la situation confuse dans laquelle la conception descriptive et objective de la proposition $\mathcal{P}$ nous a entraînés. Seules des analogies trompeuses nous conduisent à penser que nous comprenons d'emblée $\mathcal{P}$ à la seule lecture du texte qui la constitue. Plutôt que de parler de $\mathcal{P}$ comme d'une proposition mathématique achevée, il faudrait appliquer ce terme au couple $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$. En particulier, le sens de

il existe deux irrationnels α *et* β

dans la proposition achevée $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$ est

ou bien $\alpha = \sqrt{3}$ *et* $\beta = \sqrt{2}$, *ou bien* $\alpha = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ *et* $\beta = \sqrt{2}$

avec la conséquence troublante qu'une autre démonstration $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{P}$ aboutit en fait à une autre proposition achevée $(\mathcal{D}', \mathcal{P})$ dans laquelle le "*il existe deux irrationnels* α *et* β" a vraisemblablement une nouvelle signification qui se révèle dans $\mathcal{D}'$. Cette multiplicité de sens est choquante de prime abord pour le mathématicien habitué à gommer les différences mais elle constitue seulement la prise en compte lucide de l'immense diversité et de la richesse des techniques mathématiques.

De manière analogue, le "*il existe* $x \in [0,1]$ *tel que* $f(x) = 0$" du théorème de la valeur intermédiaire peut se référer en analyse classique à l'algorithme de dichotomie qui "produit" un tel nombre réel x. Dans le cadre de l'analyse effective[3], ce même théorème est faux : d'une part l'algorithme de dichotomie n'est plus recevable puisque l'opération de comparaison des nombres réels n'est pas fondée algorithmiquement[4], d'autre part on peut montrer qu'il n'existe pas d'algorithme effectif fournissant en général une valeur intermédiaire. Dans le système de l'analyse effective, *il n'existe en aucun sens*, pour une fonction continue arbitraire f, un nombre réel x tel que $f(x) = 0$.

Ainsi, *une proposition mathématique* (par exemple le théorème de la valeur intermédiaire) *est inséparable de sa démonstration* (par exemple l'algorithme de dichotomie), *le tout s'insérant dans un système plus vaste* (par exemple l'analyse classique), *la démonstration servant de pont entre l'énoncé nu de la proposition et le système englobant.*

Sous une hypothèse de régularité supplémentaire de la fonction f (par exemple si elle est analytique), le théorème de la valeur intermédiaire se vérifie en analyse effective. Mais à nouveau, le "*il existe* $x \in [0,1]$ *tel que* $f(x) = 0$" acquiert un sens original, radicalement différent de celui qu'il pouvait avoir en analyse classique. Maintenant, cette existence se réfère à un algorithme effectif prenant en compte de manière fondamentale la régularité de f. D'ailleurs, en l'absence de la donnée explicite de cet algorithme, ce "*il existe*" est aussi trompeur que celui de la proposition $\mathcal{P}$. Par exemple, le mode d'existence de ce nombre réel x est clairement une fonction de la complexité de l'algorithme, et l'usage que l'on pourrait en faire en dépend fortement. Ainsi, même en analyse effective, l'existence démontrée d'un nombre réel ne permet pas à coup sûr de pouvoir en expliciter une approximation rationnelle à 10^{-3}-près...

3 Métamathématique et indécidabilité

Un étude comme celle qui est développée dans ce texte se doit d'affronter les problèmes posés par le statut de la *métamathématique*. En effet, cette dernière se définit explicitement comme la théorie de la mathématique formelle, reproduisant par la-même le schéma objet/théorie qui fonde le point de vue objectiviste. De plus, cette "théorie" s'est illustrée spectaculairement en annonçant l'existence de *propositions indécidables*. Etant donné ce qui a été dit dans le paragraphe précédent sur le lien de signification qui unit une proposition à sa démonstration, le terme même de proposition indécidable sonne curieusement. Qu'est-ce donc comme type de proposition ? Est-il possible qu'un énoncé soit

[3]Une théorie mathématique est dite *effective* lorsqu'elle est de part en part algorithmique, chaque algorithme étant explicité et si possible mis en œuvre dans un langage de programmation.

[4]Cependant, la mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie constitue souvent l'un des premiers exemples de programmation que l'on exige de nos étudiants en mathématiques. Cela n'est possible que sur la base d'une double méprise : celle de l'analyse mathématique qui postule que deux nombres réels sont effectivement comparables, celle du langage de programmation dont les spécifications laissent entendre qu'il est capable d'opérer une telle comparaison alors qu'il se contente de comparer des approximations rationnelles.

à la fois indémontrable et interprétable comme un proposition mathématique ? L'imbroglio devient total à la lecture du résultat de Gödel sur l'existence d'une *proposition indécidable mais vraie.* Face à une situation aussi troublante, un conseil de Wittgenstein (extrait d'une lettre à Schlick) peut être le bienvenu

> *Si tu apprends que quelqu'un a prouvé l'existence de propositions indécidables en mathématiques, il n'y a pas lieu de s'en étonner car tu n'as encore aucune idée sur la signification exacte de cette affirmation apparemment claire. Tu dois alors parcourir la preuve de A à Z afin de savoir ce qui a été réellement démontré.*

Il est tentant de suivre ce conseil à propos du fameux théorème d'incomplétude de Gödel dont voici un énoncé plus précis

> *Il existe dans l'arithmétique formelle $\mathcal{T}$ une proposition $\mathcal{G}$ indécidable mais vraie, sous réserve que $\mathcal{T}$ soit consistante.*

A nouveau, l'habitude veut que l'on ait l'impression de comprendre ce théorème à la seule lecture de son énoncé, mais le paragraphe précédent a montré que cette compréhension peut être superficielle et illusoire. Afin de donner un sens précis au mode d'existence de la proposition $\mathcal{G}$ de Gödel, il faut regarder lucidement une démonstration du théorème. Or, les diverses preuves du résultat de Gödel sont autrement plus complexes que celle de la proposition exposée dans le paragraphe précédent[5]. Cette grande difficulté conceptuelle rend particulièrement délicate l'application d'un point de vue Wittgensteinien. D'ailleurs, les quelques remarques de Wittgenstein à propos de ce théorème lui ont attiré des critiques cinglantes de la plupart des commentateurs[6] intéressés par ce résultat ; selon eux, les propos du philosophe étaient indignes de lui tant ils traduisaient une incompréhension fondamentale de la nature de ce théorème. Personnellement, je suis tenté de retourner cette critique : les remarques de Wittgenstein sur le théorème de Gödel paraissent d'autant plus scandaleuses et déplacées que l'on a mal compris les bases de sa philosophie. Des études récentes[5, 8] permettent de réévaluer cet aspect de l'œuvre de Wittgenstein.

Dans le cadre de cette modeste étude, on se contentera d'évoquer grossièrement les grandes étapes d'une démonstration de ce théorème[7, 12], en indiquant que l'aspect "contrôle de récursivité", qui joue pourtant un rôle technique important, est volontairement laissé dans l'ombre, au moins dans cette première approche.

1. Le codage de Gödel permet d'associer de manière injective un nombre entier (son nombre de Gödel) à chaque formule ou à chaque suite de formules de $\mathcal{T}$.

2. On définit grâce à ce codage une relation binaire Dem sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers de sorte que $Dem(a, b)$ soit vraie si, et seulement si, la suite de formule de nombre de Gödel a est une démonstration de la formule de nombre de Gödel b. En fait, Dem est une formule de $\mathcal{T}$ représentant cette relation.

---

[5]Cela peut expliquer une partie du "délire" philosophique qui s'est créé autour de ce théorème.

[6]Anderson, Bernays, Dummett, Gödel, Goostein, Kreisel, Stegmüller. Confer[8, 5] pour des références précises.

3. De même, on considère une fonction φ définie sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. La relation $\varphi(a) = b$ est vraie si et seulement si a est le nombre de Gödel d'une formule $\mathcal{F}_a$ et b est le nombre de Gödel d'une formule $\mathcal{F}_b$ obtenue à partir de $\mathcal{F}_a$ en remplaçant toute occurrence de la variable libre y, si elle apparaît dans $\mathcal{F}_a$, par le représentant formel de a. Comme pour la relation Dem précédente, φ est un représentant formel dans la théorie $\mathcal{T}$ de la fonction que l'on vient de décrire.

4. La formule $\forall x \neg Dem(x, \varphi(y))$ (dans laquelle $\neg$ est le symbole de la négation formelle) possède y comme seule variable libre et on désigne par m le représentant formel de son nombre de Gödel. La formule $\mathcal{G}$ de Gödel est représentée par
$$\forall x \neg Dem(x, \varphi(m)).$$
Par construction, le nombre de Gödel de $\mathcal{G}$ est $\varphi(m)$. D'où il suit que $\mathcal{G}$ "s'interprète" comme énonçant que la formule de nombre de Gödel $\varphi(m)$, c'est-à-dire elle même, n'est pas formellement démontrable. Il en découle que, si l'arithmétique formelle est consistante, alors la formule $\mathcal{G}$ est indémontrable et donc vraie. Un raisonnement supplémentaire permet de montrer que $\mathcal{G}$ est indécidable.

Peut-on appliquer au théorème de Gödel le principe selon lequel le sens d'une proposition découle de sa démonstration ? Qu'apporte de nouveau cette dernière par rapport à la lecture naïve de l'énoncé du résultat ?

Ce théorème nous annonçant l'existence de $\mathcal{G}$ en tant que formule de $\mathcal{T}$, on est naturellement amené à s'imaginer $\mathcal{G}$ commme un objet réel, donné sous la forme explicite d'une chaîne admissible de caractères et situé au même niveau de concrétude que, par exemple, la transcription formelle des axiomes de Péano. L'observation attentive de la démonstration prouve que ce n'est pas le cas. La complexité de la fonction de codage de Gödel et le fait que les divers ingrédients qui contribuent à définir $\mathcal{G}$ nécessitent, via le codage, un va et vient incessant entre le système des formules et celui des nombres, rendent très délicate sinon matériellement impossible la réalisation de $\mathcal{G}$ comme assemblage explicite de symboles. La démarche de Gödel n'a rien à voir avec la constatation de *l'existence empirique* d'une certaine formule. Au contraire, c'est la preuve de *l'existence nécessaire* de $\mathcal{G}$ comme *objet-mathématique* qui n'est défini, cerné, contrôlé que grâce à la démonstration. C'est la métamathématique qui crée littéralement la formule $\mathcal{G}$ et nous convainc de l'impérative nécessité de ses propriétés paradoxales. En cela, cette branche des mathématiques se dévoile comme étant non pas une *théorie descriptive* des objets concrets du langage $\mathcal{T}$ mais comme la *grammaire* de ce système (de même que la géométrie euclidienne n'est pas la théorie de l'espace physique usuel mais sa grammaire). On peut d'ailleurs concevoir la démonstration de Gödel comme une *contruction géométrique* au terme de laquelle la formule $\mathcal{G}$ est produite comme un point de "l'espace logique" du langage $\mathcal{T}$. L'important n'est pas le point isolé mais l'ensemble de la figure géométrique complexe qui détermine ce point comme concept normatif.

Empiriquement problématique mais mathématiquement nécessaire, la formule $\mathcal{G}$ possède la propriété de ne pas être formellement démontrable. Encore une fois, il s'agit d'une propriété-mathématique obtenue au terme d'une preuve. Il n'est pas innocent de constater qu'il s'agit d'une preuve par l'absurde s'appuyant essentiellement sur la supposition gratuite de la consistance de $\mathcal{T}$: si l'on suppose que $\mathcal{G}$ est formellement dérivable, alors l'arithmétique formelle produit une contradiction. Or la machinerie métamathématique avait été initialement (et vainement) créé pour prouver la consistance de $\mathcal{T}$...

Enfin quelle signification faut-il attacher à l'affirmation selon laquelle $\mathcal{G}$ est vraie ? Encore une fois, il faut rappeler que $\mathcal{G}$ n'est pas une proposition au sens habituel. C'est une formule de $\mathcal{T}$ dont le mode d'existence est celui d'un objet-mathématique et il est donc tout à fait injustifié de la considérer comme un texte intelligible exprimant une propriété de l'arithmétique. La démonstration de Gödel prouve la vérité nécessaire de la proposition métamathématique "*si l'arithmétique formelle $\mathcal{T}$ est consistante, alors la formule $\mathcal{G}$ n'est pas dérivable*", et ensuite, le codage via les nombres de Gödel permet d'attribuer la valeur "*vrai*" à $\mathcal{G}$ dans le cadre d'un jeu formel vrai-faux interne à la démonstration métamathématique. On peut imaginer un jeu de langage analogue qui permettrait de coder les formules de $\mathcal{T}$ par des figures d'un espace géométrique et d'attribuer la valeur *vrai* ou *faux* à certaines de ces figures ; cela ne confèrerait en rien le statut de proposition vraie ou fausse à ces figures.

Une raison de la confusion qui règne à propos de $\mathcal{G}$ est qu'on la représente simplement avec des métasymboles par la chaîne de caractères $\mathcal{G}'$ suivante

$$\forall x \neg Dem(x, \varphi(m))$$

que l'on interprète naturellement comme une proposition de l'arithmétique. Mais il ne faut pas confondre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$. En particulier, $\mathcal{G}'$ n'admet pas de nombre de Gödel puisque seules les authentiques formules de $\mathcal{T}$ se voient attribuer un tel nombre par le procédé récursif de Gödel. Si l'on accepte de lire $\mathcal{G}'$ comme une proposition de l'arithmétique démontrée par la preuve de Gödel, il faut accepter de lui attacher le seul sens que lui confère cette preuve : supposer l'existence d'un entier k vérifiant $Dem(k, \varphi(m))$ conduit, en mobilisant toute la construction de Gödel, à l'inconsistance de $\mathcal{T}$. On est bien loin de l'interprétation triviale selon laquelle $\mathcal{G}$ serait une proposition arithmétique sémantiquement vraie bien que non vérifiable par des moyens démonstratifs. De plus, il faut noter que le problème d'attribuer à $\mathcal{G}'$ le statut de proposition nécessaire de l'arithmétique ne se pose guère dans notre pratique de mathématiciens, car, à ma connaissance, l'usage que nous pourrions en faire est encore à inventer.

Au terme de cette analyse, il me semble que le résultat de Gödel a perdu beaucoup de ses évidentes et fascinantes conséquences philosophiques. Il reste un grand théorème, doté d'une démonstration à la technique époustouflante et originale, mais qui me semble curieusement privé de conséquences profondes en mathématiques[7].

[7]On pourrait objecter qu'il est possible de fonder un type de mathématique non standard sur la base du résultat de Gödel. Mais cette possibilité n'est qu'une construction après-coup sans rapport avec l'histoire de la création de l'analyse non standard. De plus, une fois qu'elle a été mise en place, la pratique mathématique non standard se révèle très éloignée de toute problématique de fondement.

4 Propositions non démontrées mais expérimentalement vraies

Hors du contexte métamathématique, il existe une situation intéressante en rapport avec l'indécidabilité. Elle se présente avec des propositions arithmétiques telles que, si on note $\mathcal{P}(n)$ l'une d'entre elles, on ait

- malgré tous leurs efforts, les mathématiciens ne savent pas démontrer que $\forall n\ \mathcal{P}(n)$ est vraie ;
- pour tout nombre entier n que nos moyens de calcul effectif nous permettent d'atteindre, $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite.

La vérification à l'aide d'un ordinateur de la véracité de $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$,..., $\mathcal{P}(1\,000\,000)$,..., ressemble irrésistiblement à une expérience cruciale de la physique. J'emprunte le terme d'expérience cruciale à mon ami et contradicteur J. Harthong ; par là, il entend un dispositif qui met en évidence une régularité imprévue et non encore codifiée sous la forme d'une loi. On est fortement tenté d'y voir une véritable expérience mettant en évidence la propriété "*tous les nombres entiers n satisfont* $\mathcal{P}(n)$". Cette propriété est indépendante de nous puisque nous ne savons justement pas la démontrer. L'objectivisme en mathématique est ainsi sur le point d'être justifié ! Cela mérite assurément d'y regarder de plus prés.

La première remarque à faire est que la vérification de $\mathcal{P}(0)$,...,$\mathcal{P}(1\,000\,000)$, ..., n'a que l'apparence d'une constatation factuelle. Par exemple, si nous *savons* que $\mathcal{P}(1\,000\,000)$ est *vraie*, c'est que cette certitude est attachée à un calcul que nous avons fait ou programmé. C'est dire que la propriété "$\mathcal{P}(1\,000\,000)$ *est vraie*" est le résultat d'une forme de démonstration, même si un ordinateur a été utilisé pour cela. Le sens de la proposition "$\mathcal{P}(1\,000\,000)$ *est vraie*" dépend fortement de la démonstration de $\mathcal{P}(1\,000\,000)$. Il en découle que ces propriétés ne sont pas particulièrement objectives, car elles dépendent de nous, de nos capacités à créer et à contrôler un calcul. D'ailleurs, pour des très grands nombres n, le problème de ce contrôle va se poser de manière accrue et il va nous falloir à nouveau inventer des procédures spécifiques pour vérifier $\mathcal{P}(n)$ et préciser par la même son sens.

Plus importante encore, la deuxième remarque est que, en l'absence d'une preuve, la propriété "*tous les nombres entiers satisfont* $\mathcal{P}(n)$" n'a *aucune signification naturelle*, même si cette affirmation paraît scandaleuse et provocante. Seul, notre platonisme viscéral peut nous faire croire que nous comprenons la formule isolée "*tous les nombres entiers*". Le problème n'est pas seulement lié à la fiction des ensembles infinis. Il subsiste aussi, bien que de manière plus subtile, dans une vision potentielle (ou "sémantique") des nombres. Une authentique proposition mathématique débutant par la formule "tous les nombres entiers" possède autre chose qui en précise le sens, à savoir une démonstration.

"*Tout nombre entier se décompose en facteurs premiers*" n'est pas la description d'un état de fait du genre : tous les nombres entiers sont, depuis toujours, naturellement décomposés en un produit de nombres premiers. Le sens en est plutôt : "*donne moi un nombre entier à ta guise, j'ai un truc qui le décompose en facteurs premiers*". Lorsqu'elle est énoncée ainsi, on voit très bien quel type de démonstration soutient cette proposition.

Un sens fréquemment associé à la formule $\forall n \mathcal{P}(n)$ est celui que lui confère une *démonstration par récurrence.* Même dans ce cas, il faut se garder d'interpréter cette formule comme l'analogue de "*toutes les pommes de ce panier sont vertes*". Fort du principe cher à Wittgenstein selon lequel *une démonstration ne démontre que ce qu'elle démontre*, il faut s'en tenir à l'interprétation suivante : $\forall n \mathcal{P}(n)$ signifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que la vérité de $\mathcal{P}(n)$ implique celle de $\mathcal{P}(n+1)$. Rien de plus, rien de moins, et pour bien disjoindre ce sens de celui découlant d'une description factuelle, il suffit de se demander pour quels entiers n la démonstration par récurrence nous guide vers une vérification effective de $\mathcal{P}(n)$. Il est clair que le chemin nous est indiqué pour vérifier $\mathcal{P}(10)$, $\mathcal{P}(100)$, peut-être $\mathcal{P}(1000)$, c'est-à-dire pour tous les nombres entiers n pour lesquels nous pouvons énumérer sans trop de peine la totalité des prédécesseurs. Il n'en est pas de même pour un nombre n_0 "très grand", par exemple de l'ordre de grandeur de

$$n_0 = 10^{10^{10^{10}}}.$$

Pour la vérification individuelle de $\mathcal{P}(n_0)$, la preuve par récurrence ne nous est pas d'un grand secours[8].

Ainsi, en l'absence d'une démonstration, la proposition mathématique "tous les nombres entiers satisfont $\mathcal{P}(n)$" a un statut très particulier car, n'étant pas reliée en amont à un système englobant, elle est dotée d'un sens fondamentalement inachevé. C'est une *conjecture*, dont l'effet pratique est, pour nous mathématiciens, celui d'une invitation à lui trouver une signification complète. Et, à supposer que ce travail soit accompli un jour, nul ne peut préjuger à l'avance de ce qu'il faudra inventer et créer pour cela. Il n'est pas impensable que la recherche d'une réponse à certaines de nos conjectures arithmétiques d'apparence pourtant bien anodine nous oblige à des bouleversements théoriques profonds, par exemple sur ce que sont les nombres entiers. Cette dernière hypothèse, qui doit paraître complètement saugrenue à un platonicien, est là pour faire sentir l'aspect irréel et évanescent de la formule "tous les entiers".

5 Mise en garde contre le dogmatisme

Indépendamment de sa propre opinion sur le sujet, il est possible que le lecteur soit tenté de résumer l'argumentation précédente par la thèse "*le sens d'une proposition est donné par sa démonstration*" comprise comme "*le sens d'une proposition n'est donné que par sa démonstration*". Cela constituerait à mes yeux un glissement dangereux vers un style philosophique qui consiste à énoncer des *thèses* définitives et nécessairement mutilantes.

En effet, la prise en compte de la pratique du mathématicien nous impose de ne pas passer de la constatation du caractère sémantiquement incomplet d'une proposition non démontrée, à la thèse dogmatique selon laquelle elle serait purement et simplement privée de sens. Il est courant qu'une telle proposition soit la source d'un travail fructueux : on peut en dérouler des conséquences, trouver des formulations équivalentes,...etc. Le réseau de liens qui se tissent de cette

[8] Bien entendu, cette argumentation ne prend pas en compte l'interprétation ensembliste du principe de récurrence qui réduit ce principe à une propriété triviale, à condition d'accepter l'arbitraire du fondement ensembliste et la fantasmagorie des ensembles infinis.

manière atteste (et contribue à) la présence d'un noyau de signification minimale. Il faut simplement être conscient de l'incertitude fondamentale qui affecte les termes de la "formulation en prose" de cette proposition et aussi de l'ensemble de ses conséquences.

References

[1] J. Bouveresse, *Le paradis de Cantor et le purgatoire de Wittgenstein*, Critique, 359, avril 1977.

[2] J. Bouveresse, *La force de la règle*, Les Editions de Minuit, Paris 1987.

[3] J. Bouveresse, *Le pays des possibles*, Les Editions de Minuit, Paris 1988.

[4] G.G. Granger, *Invitation à la lecture de Wittgenstein*, Editions Alinéa, Aix-en-Provence 1990.

[5] G. Heinzmann, *Wittgenstein et le théorème de Gödel*, in *Wittgenstein et la philosophie aujourd'hui*, J. Sebestik et A. Soulez (Ed.), Méridien Klincksieck, Paris 1992.

[6] E. Nagel, J.R. Newman, *Gödel's proof*, New York University Press, 1958, traduit en français dans *Le théorème de Gödel*, le Seuil, Paris 1989.

[7] Rosser, J. Barkley, *An informal exposition of proof of Göde's theorem and Church theorem*, Journal of Symbolic Logic, vol. 4 (1939), p. 53-60.

[8] S.G. Shanker, *Wittgenstein's remarks on the signifiance of Gödel's theorem*, in *Gödel's theorem*, S.G. Shanker (Ed.), Routledge, London New York, 1988.

[9] F. Schmitz, *Wittgenstein la philosophie et les mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris 1988.

[10] G. Wallet, *Réflexions sur l'objectivité en mathématiques*, dans *Le labyrinthe du continu*, H. Sinacœur et J.M. Salanskis (Ed.), Springer France, Paris 1992.

[11] L. Wittgenstein, *Remarques philosophiques*, Editions Gallimard, Paris 1975.

[12] L. Wittgenstein, *Grammaire Philosophique*, Editions Gallimard, Paris 1980.

[13] L. Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Edition Gallimard, Paris 1983.

[14] L. Wittgenstein, *Investigations philosophiques*, publié à la suite du *Tractatus logico-philosophicus*, Editions Gallimard, Paris 1961.

[15] F. Waismann, *Wittgenstein et le cercle de Vienne*, texte établi par B. McGuinness d'après les notes de F. Waismann, Trans-Europ-Repress, Mauvezin 1991.