SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

ROGER APERY

Nature des objets mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1985, fascicule 3
« Nature des objets mathématiques », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1985___3_A1_0>

NATURE DES OBJETS MATHÉMATIQUES

par

Roger APERY

Question préalable

Existe-t-il des objets mathématiques ? En cas de réponse négative, le problème étudié dans cet exposé devrait être repoussé comme vide de sens.

Il existe une communauté mathématique qui se livre à une activité mathématique, notamment en publiant des écrits mathématiques. Cette communauté a une frontière plus nette que les communautés philosophiques, politiques, artistiques. Ce qui est théorème pour les uns est théorème pour les autres ; si un mathématicien (fut-il Riemann ou Cauchy) commet une erreur de raisonnement, cette erreur est reconnue par tous.

Un théorème authentique (c'est-à-dire dont la démonstration ne présente pas de trou) est définitivement acquis. Par exemple, l'irrationalité de π, démontrée par Lambert en 1761 , est reconnue définitivement comme vraie. Malgré les progrès considérables des mathématiques et les performances fantastiques des ordinateurs, nul n'imagine qu'un jour un ordinateur très puissant découvrira un entier tellement grand que son produit par π soit entier.

On peut parler d'objets mathématiques, à condition de concevoir ce mot au sens vague (machin, truc). Un groupe ou un espace topologique sont des exemples d'objets mathématiques, d'autres exemples sont fournis par des théorèmes ou des démonstrations.

Le rêve platonicien

Pour certains, les objets mathématiques existent avant nous et sans nous, ils sont découverts comme les cailloux, les montagnes, les astres. Le fait d'être découverts par la réflexion et non par les télescopes et les microscopes ne les empêche pas d'exister dans un monde idéal rêvé par Platon et enrichi par Cantor.

Le monde tel que nous le connaissons semble à certains penseurs trop imparfait pour être consistant, ils le considèrent comme un jeu d'ombres; le monde authentique ou monde des idées, par contre, possède la perfection et la permanence qui manque au nôtre : c'est le mythe de la caverne. Le monde des idées séduit notre sens esthétique et notre désir de perfection ; malheureusement il est essentiellement inconnaissable ; sans le nier, ce qui serait une affirmation métaphysique, il est préférable d'accepter les limites de la condition humaine et de n'examiner que des concepts qui peuvent être atteints par notre pensée discursive en évitant tout référence à une pensée divine ou angélique à laquelle nous sommes fondamentalement étrangers.

Le jeu formaliste

Comme les objets mathématiques, contrairement aux astres, sont étroitement liés aux hommes, certains mathématiciens, qui s'intitulent eux-mêmes formalistes ont pensé que les objets mathématiques, comme les œuvres d'art, sont inventés par nous. Par exemple, dans une lettre à sa sœur, André Weil se targue d'avoir inventé (et non découvert) les espaces uniformes. L'orgueil du mathématicien se manifeste particulièrement dans la déclaration de Dedekind "*nous sommes comme des dieux, nous avons le pouvoir de créer*".

Puisque les objets mathématiques, contrairement aux objets physiques, sont connus par le raisonnement et non par les sens, les formalistes, à juste titre, se sont efforcés de codifier les méthodes de raisonnement employées. Mais dans la mesure où ces méthodes relèveraient d'un choix gratuit et où les symboles mathématiques ne symboliseraient rien et se réduiraient à leur forme concrète, la mathématique comme tout autre jeu serait subjective, ce qui se heurte à l'accord des mathématiciens sur les énoncés vrais, démontrés par des raisonnements justes, les énoncés faux, rigoureusement réfutés et les énoncés douteux, dont la démonstration est inexistante ou au moins insuffisante.

Aux examens, les épreuves de mathématiques peuvent être notées avec plus de précision que les épreuves de littérature ou de philosophie parce qu'elles relèvent moins du tempérament personnel.

Les mathématiques diffèrent essentiellement des mots croisés, rébus ou jeux. Un rébus ou un problème de mots croisés admet a priori, une solution-type. Une grille de mots croisés ressemble à la rigueur à un problème de mathématiques du baccalauréat, mais pas à une recherche authentique. La résolution de la grille relève de la culture ; la définition d'un mot dépend d'allusions à des événements récents, de jeux de mots, de questions relatives aux connaissances littéraires ou artistiques du "cruciverbiste", elle n'atteint pas une vérité durable, une grille de mots croisés ne peut se traduire d'une langue dans une autre.

Les seuls jeux analogues à l'activité mathématique ne contiennent aucune intervention du hasard et ont des étapes discontinues, ce qui élimine par exemple, le jacquet et le jeu de "cache-cache".

Même un jeu abstrait comme le jeu d'échecs se distingue essentiellement de toute activité scientifique par la nécessité de jouer contre un adversaire dont il faut déjouer les pièges.

D'autres activités intellectuelles comme les romans, les pièces de théâtre ou les symphonies, n'ont pas pour objectif de résoudre un problème.

Un mémoire mathématique a pour but de répondre a une question. Souvent l'auteur du mémoire substitue à la question trop facile une question plus générale ou particularise une question trop difficile.

Par exemple, si on conjecture qu'une suite u_n de réels > 0 tend vers 0, on peut se contenter de démontrer que la suite est bornée.

Le souci d'atteindre la vérité approche le raisonnement mathématique du raisonnement physique ou biologique. L'expérience mathématique exige des moyens plus limités, moins coûteux et l'activité est essentiellement mentale; le développement massif des moyens de calcul a atténué cette différence.

Nombres entiers

Quand deux thèses opposées s'affrontent, on peut s'accrocher désespérément à l'une des deux en arguant des insuffisances de l'autre ; on peut aussi, en les repoussant dos à dos, élaborer une thèse plus adéquate à la question étudiée. C'est ce qu'ont tenté les mathématiciens nommés généralement constructivistes.

Au lieu de ranger les objets mathématiques dans des classifications a priori, il s'agit de les examiner et de mettre en évidence les caractères qui les différencient à la fois de la planète Neptune, objet physique indépendant de l'humanité, et d'une toile de Picasso, objet culturel.

Les mathématiques commencent par la manipulation des nombres entiers.
Qu'est-ce qu'un nombre entier ?

Comme pour tout concept familier, il est difficile de donner une définition : demandez à un pratiquant des sciences humaines de définir l'homme ou à un biologiste de définir la vie ! Précisons que nous parlons du nombre entier ordinal associé à une suite d'éléments identiques.

Pour répondre à la théologie échevelée de Cantor qui mesure la gloire de Dieu à la création de hautes cardinalités (le fameux "paradis" chanté par Hilbert), Kronecker déclare "Dieu créa le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme". Brouwer de son côté se réfère à l'intuition du nombre entier.

Le langage de Kronecker et celui de Brouwer expriment une même réalité étrangère aussi bien à la théologie qu'à la faculté d'imagnier visuellement des grands entiers.

Il s'agit de montrer que le point de départ de l'activité mathématique est de compter puis d'opérer sur les nombres. (On définit l'addition, la comparaison, la soustraction, la multiplication, l'exponentiation).

Afin de renouveler les méthodes anciennes, les formalistes (cf. Bourbaki, Théorie des Ensembles, chap I §1, N°1) se réfèrent à des successions de signes extraits d'un alphabet. Les nombres entiers sont des successions construites avec un alphabet à un seul signe ; les rejeter exigerait a fortiori le rejet de toutes les mathématiques formalistes.

Les nombres ainsi définis peuvent être notés I, II, III, ... ; les propriétés de la soustraction amènent à considérer la succession vide que l'on représente par 0; s'il est permis d'ôter une partie d'une collection il est naturel de permettre de tout ôter. Les nombres définis par les successions éventuellement vides sont dits "entiers naturels".

L'intuition fondamentale de l'arithmétique n'est pas l'intuition de tout nombre entier mais celle de la possibilité pour tout entier de construire le suivant, autrement dit à toute suite de bâtons d'ajouter un nouveau bâton. Alors qu'il y a plusieurs géométries (on peut rejeter le postulat d'Euclide), plusieurs théories des ensembles (on peut rejeter l'axiome du choix), il n'y a qu'une seule arithmétique : personne n'a bâti une arithmétique où un nombre suffisamment grand serait tel qu'on puisse ajouter 1. La possibilité d'ajouter un nouvel élément au bout d'une suite, supposer d'imaginer que la partie finale de la suite est fondamentalement semblable à celle de toute autre suite, ce qui permet de la prolonger ; elle ne suppose pas une intuition de l'ensemble de la suite qui permettrait par exemple d'un seul coup d'œil de comparer 10^{1000} et 2^{3322}.

Celui qui voudrait rejeter la possibilité d'ajouter un nouveau bâton à une suite, rejetterait a fortiori toute logique et tout formalisme en supposant des signes qui s'usent et des règles logiques qui se périment, ce qui empêcherait de les appliquer de nouveau après un trop long usage.

Peano a tenté d'éviter l'appel à l'intuition des entiers en formalisant les propriétés des nombres. Le théorème de Gödel et ses généralisations, montrent qu'aucune formalisation des entiers n'est adéquate : tout système axiomatique qui définit les entiers définit aussi d'autres éléments. Le succès de l'analyse non-standard montre que ces éléments étranges (infiniment petits ou infiniment grands) peuvent être utilisés efficacement pour élaborer des théories nouvelles.

Si le théorème de Gödel interdit une liste exhaustive des propriétés des entiers naturels, il est souhaitable d'en préciser quelques-unes.

Nous soulignons la plus importante : deux entiers donnés sont nécessairement égaux ou inégaux ; cela signifie qu'il est possible de trancher la question en un nombre peut-être grand mais fini d'étapes : il n'est pas légitime de parler de l'entier égal à 0 ou 1 selon que tel problème (non résolu donc peut-être insoluble) a une réponse affirmative ou négative. Les difficultés n'apparaissent pas seulement avec les ensembles de haute cardinalité ou l'axiome de choix ; mais aussi dans certaines définitions classiques de nombres entiers dont une analyse précise montre l'illégitimité.

Après les entiers naturels, les mathématiciens introduisent les entiers relatifs, les rationnels ; tous ces éléments nouveaux se distinguent, s'ordonnent, s'additionnent, se multiplient selon des règles un peu plus complexes, mais ne présentent pas de difficulté philosophique. Enfin on étudie les suites strictement finies d'entiers (ou de rationnels) il s'agit de suites dont on a écrit ou dont on a droit de considérer comme écrite la liste complète. On étudie aussi les ensembles strictement finis d'entiers relatifs ou de rationnels.

Suites infinies

La mathématique ne se réduit pas à des résultats du type :

$$2 + 2 = 4$$

$$641.6700417 = 2^{32} + 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} .$$

De telles égalités, appelées <u>vérifications</u>, ne constituent qu'un prélude. La mathématique authentique commence avec l'apparition de suites infinies $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ Pour simplifier, nous supposons que les u_n sont des entiers naturels. En général, on ne peut considérer la suite comme un objet achevé (conception de l'infini actuel) mais comme un processus. On considère la suite comme déterminée s'il existe un procédé constructif qui permette de calculer

u_n connaissant n . Par exemple, la suite de Fibonacci est déterminée par :

$$u_o = 0 \; ; \quad u_1 = 1 \; ; \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

Quelque soit m, on peut considérer la suite comme déterminée pour $n < m$, on peut toujours la continuer, mais on n'a jamais fini, c'est pourquoi la suite est dite infinie.

La suite la plus immédiate est la suite des entiers naturels : l'aspect infini s'exprime par la règle: après tout nombre entier on peut construire le suivant.

Il n'est pas possible de répondre à n'importe quelle question concernant tous les éléments d'une suite, néanmoins certaines questions sont décidables. Par exemple, l'addition des entiers naturels est commutative.

De tels résultats s'obtiennent à l'aide du raisonnement par récurrence : si une suite arbitrairement longue de déductions logiques est valable, il est permis de passer de la première affirmation à la dernière, alors que la logique élémentaire n'utilise que des arguments explicitement écrits dont on ne peut laisser le nombre indéterminé. Formellement, si p(n) est une propriété d'entiers, si, pour chaque entier n , on peut démonter que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ et si p(0) est vrai, alors p(n) est vrai quel que soit n : c'est le principe de récurrence.

L'usage direct ou indirect du principe de récurrence permet de démontrer des résultats, mais les suites sont essentiellement des processus et non des objets achevés. Il n'y a pas d'autre réalité pour une suite que les éléments déjà calculés et le procédé pour calculer des éléments nouveaux. La logique bivalente traditionnelle ne s'applique que dans un monde figé où toute question peut-être tranchée par oui ou non. Les êtres mathématiques, essentiellement en devenir, relèvent d'une logique différente.

Ensembles d'entiers naturels

Les ensembles mathématiques ne doivent pas être identifiés à des collections concrètes (ensembles des îles de la Méditérranée) mais dépendent de leur procédé de définition.

Nous appellerons ensemble décidé tout algorithme qui pour tout entier naturel n permet de trancher si n appartient ou non à l'ensemble.

Nous appellerons <u>ensemble énuméré</u> l'ensemble des valeurs prises par une suite d'entiers. Les ensembles décidés ou énumérés sont analogues, mais dans un sens légèrement différent, à ce que les classiques appellent ensemble récursif ou ensemble récursivement énumérable.

Un ensemble décidé n'est pas nécessairement vide ou non vide. Un ensemble décidé et majoré est effectivement fini, on ne peut en dire autant d'un ensemble énuméré et majoré.

Nombres réels

Un nombre réel est défini par une suite de Cauchy de rationnels.

Il y a des suites qui sont de Cauchy parce qu'on peut trouver n_o tel que pour tout couple n, n' plus grand que n_o

$$|u_n - u_{n'}| < \varepsilon$$

Il y a des suites qui ne sont pas de Cauchy. Il y a des suites qui ne peuvent pas ne pas être de Cauchy. Enfin, il y a des suites dont on ne peut démontrer ni qu'elles sont de Cauchy ni qu'elles ne le sont pas.

Deux suites de Cauchy déterminent le même nombre réel si, en les intercalant, elles donnent une nouvelle suite de Cauchy.

En fait deux nombres réels peuvent être égaux (nous venons de le définir) séparés (il existe m tel que la différence soit $> \frac{1}{m}$) différents (on déduit une absurdité en les supposant égaux) ; il peuvent aussi n'être ni différents ni égaux parce qu'on ne peut trancher. Il n'y a pas un sac de nombre réels. Tout nombre réel n'est qu'une façon de parler d'une suite de Cauchy.

Fonctions réelles de variable réelle

Une fonction de x définie pour $0 \leqslant x \leqslant b$ est nécessairement continue. Les fonctions discontinues au sens classique, par exemple en 0 ne sont pas définies pour certaines suites de Cauchy. (Celles dont la limite n'est ni nulle, ni différente de 0).

Certains résultats classiques cessent d'être valables en analyse constructive : par exemple, on peut construire une fonction continue pour $a<x<b$ négative en a, positive en b et qui ne s'annule pas.

Les mathématiciens classiques sont tentés pour ne pas modifier les théorèmes classiques d'admettre l'existence d'un réel qui annule la fonction considérée, ce réel a des propriétés étranges, car il ne peut être encadré par deux rationnels de différence aussi petite qu'on veut, il s'agit de mainten le nom d'objet mathématique à des êtres nouveaux en élargissant la définition.

Logique constructive

Il n'appartient pas à l'épistémologiste d'imposer aux praticiens d'une science (biologie, chimie, physique, mathématique) les méthodes et les règles de justification des résultats ; en particulier en ce qui concerne la mathématique, l'épistémologue ne doit pas imposer au mathématicien le carcan de la logique bivalente mais examiner la logique effectivement utilisée en mathématique ; une formalisation adéquate de la logique constructive a été fournie par Heyting. Contrairement à la légende d'exigences constructives appauvrissantes, la logique constructive apporte des résultats que la logique bivalente classique est incapable d'exprimer.

Les divergences sont relatives essentiellement au connecteur $\vee$ (ou) et au quantificateur $\exists$ (il existe).

$p \vee q$ dans le sens du logicien classique signifie simplement $\neg(\neg p \wedge \neg q)$: on ne peut affirmer à la fois la négation de p et celle de q. Un tel jugement classique est valable pour le mathématicien constructif, mais ce dernier a besoin d'un autre quantificateur que la logique classique ne peut exprimer : il existe un algorithme permettant soit d'affirmer p soit d'affirmer q. Le principe du tiers exclu classique n'est que le principe de non-contradiction, il est donc indiscutable. Le principe du tiers exclu constructif affirme beaucoup plus, c'est pourquoi il n'est pas toujours valable.

Aspect temporel de la mathématique

De même qu'on n'a jamais fini de calculer les décimales de π, on n'a jamais fini de construire des objets mathématiques. Tout point de vue sur les mathématiques est nécessairement incomplet et susceptible d'être enrichi. Ce que la mathématique vivante nous pousse à rejeter, c'est la référence implicite à une mathématique achevée où toutes les questions seraient tranchées, toutes les conjectures démontrées et réfutées où la bivalence s'appliquerait et où le mathématicien pourrait enfin contempler au lieu de chercher.

D'autre part, un raisonnement mathématique se déroule dans le temps comme une symphonie, mais il s'agit d'un temps qui se reproduit.

Les stades de la pensée mathématique

Pour s'accrocher à des positions philosophiques simplistes (formalisme ou platonisme) l'épistémologie doit se boucher les yeux, refouler les résultats contraires à sa vision et mutiler gravement la pensée mathématique.

Bien que les mathématiciens s'accordent à nommer $\mathbb{R}$ un ensemble ayant pour éléments tous les nombres réels, cet ensemble est aussi mal défini qu'un plan, qu'on nommerait Π et qu'on déterminerait par l'ensemble des axiomes usuels d'Euclide, non compris l'axiome des parallèles.

De même qu'on peut légitimement imposer à Π l'axiome d'Euclide ou l'axiome de Lobatchevski, on peut légitimement imposer à $\mathbb{R}$ soit l'axiome du continu, soit sa négation.

A un stade donné Σ de la pensée mathématique, certains résultats sont des théorèmes (propositions démontrées), des contre-théorèmes (propositions réfutées) des propositions non décidables (axiome du choix), enfin des propositions douteuses (conjecture de Fermat ou de Riemann).

Les stades de la pensée mathématique sont liés par une relation d'ordre. Σ' est un stade plus ample de la pensée mathématique s'il admet les mêmes théorèmes, contre-théorèmes et propositions non décidables, mais où certaines des propositions douteuses ont cessé de l'être en vertu d'un mode de raisonnement admis.

L'épistémologue doit non seulement renoncer à l'ensemble de tous les réels et à l'ensemble de tous les ensembles, mais aussi au rêve hilbertien d'une mathématique finale où la famille des propositions douteuses serait définitivement résorbée.

Depuis l'antiquité, les philosophes ont éprouvé l'impossibilité d'un jugement vrai sur le tout ou simplement sur l'univers de la pensée (exemple cantorien d'ensemble infini !). La pratique de la mathématique montre la même impossibilité d'une mathématique définitive où s'appliquerait la logique du oui ou du non.

Les stades de la pensée mathématique ne se confondent pas avec les évènements de l'histoire des hommes. Bien qu'Hermite soit mort depuis longtemps, l'apprenti mathématicien désireux d'apprendre la démonstration de la transcendance de e devra se placer d'abord au stade où cette transcendance était douteuse.