Rudolph Bkouche

La naissance de la géométrie non-euclidienne

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 7
« La naissance de la géométrie non-euclidienne », , p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982___7_A1_0>

LA NAISSANCE DE LA GEOMETRIE NON-EUCLIDIENNE

par Rudolph BKOUCHE

I.R.E.M. de Lille

Cet exposé reprend en partie les chapitres consacrés à la géométrie non-euclidienne du texte : " Euclide, Klein, Hilbert et les autres ... " à paraître dans " La Rigueur et le Calcul " , publié par le groupe Epistémologie Inter-I.R.E.M.

On pourrait résumer l'exposé par le sous-titre suivant : " Pourquoi Lambert n'a pas inventé la géométrie non-euclidienne ?"

Parmi les méthodes de démonstration du postulat, des parallèles, on peut citer les tentatives de démonstration par l'absurde : on suppose que le postulat des parallèles n'est pas vérifié et on espère arriver à une contradiction ; la méthode a été, à ma connaissance, utilisée par les mathématiciens arabes, Al Haytham (Alhazen), Omar Khayyam, Nasir Al Din Al Tusi ; elle sera reprise au XVIIIème siècle par Sacchéri et Lambert, ce n'est pas ici le lieu d'en raconter les diverses péripéties, je renvoie par exemple à l'ouvrage de Bonola cité dans la bibliographie et aux textes originaux. Je citerai cependant la méthode de Lambert puisque c'est de lui qu'il s'agit.

On considère le quadrilatère ABCD dont les trois angles A, B, C, sont droits, qu'en est-il du quatrième ? Trois cas sont possibles, D est aigu, obtus ou droit ; si le quatrième angle d'un quadrilatère donné ayant trois angles droits, est aigu (resp. : obtus, droit) il en est de même pour tout quadrilatère ayant trois angles droits. Si l'angle D est droit, le postulat des parallèles est vérifié. Si l'angle D est obtus ceci contredit le postulat qui dit qu'on peut prolonger une droite indéfiniment. Reste le cas où l'angle D est aigu, Lambert développe les conséquences de cette hypothèse sans obtenir de contradiction, mieux il en déduit un certain nombre de propriétés qui seront celles de la géométrei hyperbolique ; par exemple il montre que la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits et que la différence avec deux droits est proportionnelle à l'aire du triangle. Développant la trigonométrie, il montre que celle-ci ressemble à la trigonométrie sphérique, à ceci près que certaines lignes trigonométriques sont remplacées par des lignes hyperboliques, il en déduit que la géométrie de l'angle aigu est celle d'une sphère de rayon imaginaire. On peut remarquer d'ailleurs que l'hypothèse de l'angle obtus est vérifiée par les triangles sphériques.

Lambert est ainsi virtuellement en possession des trois types de géométrie, l'euclidienne correspond à l'hypothèse de l'angle droit, l'hyperbolique correspond à l'hypothèse de l'angle aigu, la sphérique correspond à l'hypothèse de l'angle obtus. Cependant pour qu'il en prit conscience, il eut fallu qu'il acceptât de considérer chacune de ces géométries comme susceptible de représenter le plan usuel, celui de la géométrie physique si l'on veut s'exprimer ainsi. Mais ceci ne pouvait se faire qu'à travers une distinction entre géométrie physique et géométrie mathématique qui n'avait pas de sens à l'époque. Lambert, bien qu'on puisse le considérer comme formaliste en tant que mathématicien pratiquant, est un homme du XVIIIème siècle en ce qui concerne la conception de l'espace ; l'espace n'est pas un objet mathématique au sens où nous l'entendons aujourd'hui, ni même un objet de la physique, il est le réceptable universel des phénomènes qu'ils soient d'ordre géométrique ou d'ordre physique (si tant est que la différence a un sens à l'époque !) et on ne peut le penser en dehors de ces phénomènes. La géométrie ne saurait donc être un modèle du plan, encore moins la géométrie de la sphère imaginaire. C'est que la géométrie représente bien autre chose qu'une construction formelle à partir des postulats et d'axiomes a priori (ce qu'on appelle aujourd'hui une construction hypothético-déductive), les principes ne sont pas des hypothèses mais des vérités ; que l'espace euclidien représente la réalité physique, ou que conformément à la doctrine kantienne, l'espace ne soit qu'une forme a priori de la sensibilité, le scandale de la géométrie (pour reprendre une expression de D'Alembert) ne réside pas dans la possibilité d'une construction non-euclidienne, mais dans la non-démonstration de ce postulat non-évident et pourtant vrai. La géométrie est une (la distinction entre une géométrie mathématique et une géométrie physique, on l'a dit, n'a pas de sens) et l'objet de la méthode déductive est de démontrer les vérités géométriques à partir des principes premiers dont l'évidence ne saurait être mise en doute. Et c'est ainsi un obstacle idéologique qui empêche Lambert en possession de ce qui sera le formalisme de la géométrie non-euclidienne d'expliciter le sens de son travail.

C'est un retour à une conception empiriste de la géométrie qui permettra aux fondateurs de la géométrie non-euclidienne, Gauss, Lobatchevski, Bolyai, de découvrir (ou d'inventer, je laisse le choix du terme au lecteur) celle-ci.

C'est Gauss qui écrit en 1817 que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne et que la connaissance géométrique relève de l'expérience.

Lobatchevski, quant à lui, considère non seulement que la géométrie est une construction artificielle de l'imagination humaine à partir de l'expérience du mouvement des corps, mais que cette construction géométrique peut être multiple s'adaptant aux problèmes qu'elle veut résoudre.

Ceci étant, le fait essentiel découvert par les pères fondateurs, est la possibilité d'une bifurcation dans l'élaboration de la géométrie élémentaire : on peut énoncer le cinquième postulat, et dans ce cas on obtient la géométrie euclidienne, on peut aussi énoncer la possibilité de plusieurs parallèles menées par un point à une droite et c'est la géométrie non-euclidienne ainsi nommée par Gauss à cause des résultats surprenants qu'elle énonce : par exemple étant données deux droites du plan sans point commun, il n'y a qu'une seule sécante qui soit perpendiculaire à ces deux droites ce qui exclut la possibilité de quadrillage ; on y retrouve ainsi la géométrie de l'angle aigu de Lambert. Mais malgré cette appellation de Gauss, les méthodes des fondateurs restent euclidiennes, elles s'appuient sur les figures et sur une certaine intuition géométrique, et les propriétés topologiques implicites chez Euclide sont explicitées ce qui amène Gauss, Lobatchevski et Bolyai à préciser les conditions de validité de l'intuition géométrique. La possibilité de deux développements distincts mais chacun non contradictoire pose d'une part le problème de la multiplicité des géométries et par conséquent de leur validité sur le plan du raisonnement déductif, d'autre part le problème de savoir, parmi cette multiplicité, laquelle est la vraie géométrie, celle de l'espace physique, et par conséquent le problème de la détermination expérimentale de cette vraie géométrie.

C'est de ce double problème, validité logique et validité physique, si l'on accepte de s'exprimer ainsi, que naîtra la distinction entre la géométrie mathématique d'une part, la géométrie physique de l'autre.

D'une part la multiplicité des géométries nécessite la redéfinition de la notion d'espace en tant qu'objet mathématique, ce sera essentiellement l'oeuvre de Riemann définissant les multiplicités multidimensionnelles à travers leurs propriétés locales, ce qui deviendra la géométrie différentielle moderne, et de Klein explicitant à travers le programme d'Erlangen les relations entre groupes et géométrie.

Ce travail de redéfinition de la géométrie débouchera à la fin du XIXème siècle sur la synthèse hilbertienne, l'axiomatisation de la géométrie qui permettra d'élucider le fondement logique d'icelle.

D'autre part, la réflexion sur la géométrie physique et le lien entre celle-ci et la théorie mathématique qui la décrit se poursuivra avec Riemann, Helmholtz, Clifford, Poincaré et débouchera sur ce qu'on a appelé la géométrisation de la physique avec les théories de la Relativité d'Einstein. Mais si cette géométrisation s'est faite à travers les nouvelles géométries, si comme le dit Reichenbach, les constructions géométriques abstraites jouent le rôle de possibles pour représenter le réel, c'est bien parce qu'elles puisent , fut-ce à travers de longs et multiples trajets, dans cette première géométrie qu'est l'étude des rapports spatiaux entre les corps, et qui a été codifiée il y a plus de deux mille ans par Euclide dans un traité qui reste toujours actuel. Les géométries nouvelles se présentent ainsi à la fois comme rupture et comme synthèse, une géométrie non-euclidienne au sens que Bachelard apporte au terme *non* .

En remettant en cause l'harmonie entre la géométrie rationnelle et la géométrie empirique qui semblait acceptée une fois pour toutes à travers la multiplicité des philosophies, depuis Euclide jusqu'à Kant, les pères fondateurs ont ainsi libéré la pensée de la gangue idéologique qui avait empêché Lambert de tirer les conséquences de ses constructions géométriques, mais en même temps ils ont permis une nouvelle conception du rapport entre le rationnel et l'empirique, et ici je renvoie au texte d'Einstein : *La géométrie et l'expérience*, et au livre cité de Reichenbach.

Et puisqu'on a parlé de la théorie de la relativité, aussi malnommée par son créateur que le fut la géométrie non-euclidienne par Gauss, je terminerai en citant un autre exemple d'obstacle idéologique, celui qui fit que Poincaré, bien que possédant les éléments mathématiques et physiques nécessaires, ne sut découvrir (ou inventer, au choix du lecteur !) la théorie de la Relativité. Poincaré restait empêtré dans ses conceptions philosophiques, son conventionalisme ne lui permet de remettre en question ni la géométrie euclidienne ni la mécanique rationnelle classique, ces deux sciences complètement achevées sur lesquelles reposait la physique de son époque, et s'il y a contradiction entre l'électromagnétisme et la mécanique, il ne saurait être question de soupçonner la mécanique. Au contraire Einstein va oser faire le pas de la remise en question de la mécanique classique et la géométrie euclidienne sur laquelle elle s'appuie, ce qui l'amènera à ses découvertes. Mais ici, c'est l'empiriste Poincaré qui est bloqué par ses préjugés et c'est le métaphysicien Einstein réfléchissant sur la structure de l'espace-temps et cherchant à définir les absolus qu'un certain relativisme galiléen avait cru éliminer de la science, qui va résoudre la crise. Et le terme consacré de théorie de la relativité est inadéquat, s'il y a un retour de l'absolu en physique c'est bien avec l'espace-temps géométrisé d'Einstein qui met fin au débat entre les partisans d'un espace absolu impossible à définir expérimentalement et ceux qui prennent à la lettre le relativisme galiléen niant toute possibilité d'un espace absolu. Mais avec l'intervention des géométries en physique, c'est l'espace qui devient objet d'étude de la physique et par conséquent sa structuration qui devient problème ; alors que le XIXème siècle après la découverte de la géométrie non-euclidienne s'était plus ou moins rassuré en acceptant comme la vraie la géométrie euclidienne parce que c'est sur elle que s'appuie l'édifice de la mécanique newtonnienne, on découvre que la géométrie de l'espace elle-même est fonction du problème qui se pose et l'on retrouve Lobatchevski qui affirme l'opportunisme fondamental de la science : parmi les possibles que fabrique le géomètre mathématicien, le physicien choisit celui qui lui permet de résoudre le problème, celui qui est idoine pour reprendre le terme de celui que je considère comme le plus pertinent épistémologue des mathématiques contenporain, F. Gonseth. D'ailleurs, tout le monde le sait bien, le monde est euclidien, il n'y a qu'à regarder un cristal de quartz ou le quadrillage parfait d'une cité H.L.M., mais il est aussi riemannien nous apprend la théorie de la gravitation. Mais ces structures ne sont-elles autre chose que les constructions rationnelles de l'esprit humain confronté à la réalité ?

Lille le 27 avril 1982

B I B L I O G R A P H I E

G. BACHELARD : - Le Nouvel Esprit Scientifique. P.U.F. - 1934.
- La Philosophie du Non. P.U.F. Paris 1940.

R. BKOUCHE : - Historique in B. Senechal : Groupes et Géométries. Hermann Paris 1979.
- Euclide, Klein, Hilbert et les autres... in La Rigueur et le Calcul édité par le Groupe Epistémologie Inter-I.R.E.M. Cedic Paris 1982.

J. BOLYAI : - La Science Absolue de l'Espace. Traduction française : J. Houël. Mémoires Société Sciences Physiques et Naturelles. Bordeaux vol 5 1867.

R. BONOLA : - Non Euclidean Geometry (1912). English Translation H.S. Carslaw Dover Publi. New-York 1955.

W.K. CLIFFORD : - The Postulates of the Science of Space in J.P. Newman : The World of Mathematics. Simon and Schuster. New-York 1956.

ENGEL-STACKEL : - Die Theorie de Parallélinen von Euclid bis auf Gauss. Teubner, Leipzig 1895. Cet ouvrage contient des textes originaux de Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss.

A. EINSTEIN : - La Géométrie et l'Expérience in Réflexions sur l'électrodynamique, l'ether, la géométrie et la relativité. Gauthier-Villars Paris 1972.

F. GONSETH : - Les Fondements des Mathématiques. Blanchard Paris 1926.
- La Géométrie et le Problème de l'Espace. Editions du Griffon Neuchatel 1949.

H. VON HELMHOLTZ : - Epistémological Writings English Translation. M.F. Lowe. Reidel Publ. Company Dordrecht. Boston 1977.

- Sur les faits qui servent de base à la géométrie. Traduction française J. Houël. Mémoire Société Sciences Physiques et Naturelles Bordeaux Vol 5 1867.

D. HILBERT : - Les Fondements de la Géométrie (1899). Traduction française et notes de Rossier. Dunod Paris 1971.

F. KLEIN : - Le Programme d'Erlangen (1872). Gauthiers-Villars Paris 1974.

N. LOBATCHEVSKI : - Nouveaux Principes dela Géométrie (1835). Traduction française F. Mailleux. Mémoires Société Royale Sciences Liège - 3ème série tome 2 - 1900.

- Géométrie imaginaire. Journal de XVII - 1837

- Etudes géométriques sur la théorie des parallèles. Traduction française J. Houël. Mémoire de la société de Science Physique et Naturelle de Bordeaux Vol 4 - 1800 .

H. POINCARE : - La Science et l'Hypothèse. Flammarion Paris 1902.

H. REICHENBACH : - Philosophy of Space and Time English Translation. M. Reichenbach and J. Freund. Dover New-York 1957.

B. RIEMANN : - Sur les Hypothèses qui servent de Fondement à la Géométrie (1854). Traduction française J. Houël in Oeuvres Mathématiques. Blanchard Paris 1968.

A.P. YOUSCHKEVITCH : -Les Mathématiques arabes. Traduction française : M. Cazenave et K. Jaouiche. Vrin Paris 1976.