Séminaire de philosophie
et mathématiques

M. Loi

L'œuvre d'Albert Lautman (1908 - 1944) en philosophie des mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 12
« L'Œuvre d'Albert Lautman (1908 - 1944) en philosophie des mathématiques », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___12_A1_0>

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
45, RUE D'ULM
·75230 PARIS CEDEX 05
TÉL. 329 12-25

M. LOI

L'OEUVRE D'ALBERT LAUTMAN (1908 - 1944) en PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES

"L'essence des mathématiques, c'est la liberté". G. CANTOR

Albert Lautman fait partie de ces mathématiciens tragiques qui n'eurent pas le temps de donner toute leur mesure. Certains lui contesteront peut-être le titre de mathématicien puisqu'il n'a pas démontré un grand théorème, ni élaboré une théorie utile ; mais il eut le souci reconnu de se tenir au courant de la science en train de se faire, en participant, par exemple, régulièrement au séminaire d'Analyse de Julia. Cette prédilection pour les mathématiques, il la manifesta dès ses années de lycée en passant le baccalauréat de mathématiques élémentaires et en se liant d'amitié avec Jacques Herbrand, ensuite à l'Ecole Normale en fréquentant des mathématiciens comme Chevalley, Ehresmann, Dieudonné. Il n'est donc pas étonnant que dans ses écrits, il témoigne d'une connaissance des mathématiques les plus récentes.

Pressentait-il son destin quand il déclarait à Suzanne Lautman en 1928 : "Je ne sais rien de plus tragique que cette aube d'avant le duel, lorsque Galois prit conscience qu'il n'avait plus le temps de donner ses démonstrations ? " Son oeuvre en philosophie des mathématiques est pourtant suffisamment importante et originale, pour qu'on puisse regretter et s'étonner qu'elle ait été oubliée jusqu'à ce jour. Autre point commun avec Evariste Galois dont les idées ne furent reconnues que plus de vingt ans après sa mort. Peut-être aussi cette oeuvre d'Albert Lautman va-t-elle à l'encontre des idées reçues sur les rapports de la philosophie et des mathématiques ? " Ce livre -écrit-il dans l'introduction des "schémas de structure" dédié à la mémoire de Jacques Herbrand - est né du sentiment que dans le développement des mathématiques s'affirme une réalité que la philosophie mathématique a pour fonction de reconnaitre et de décrire. Le spectacle de la plupart des théories modernes de philosophie mathématique est à cet égard extrêmement décevant. Le plus souvent, l'analyse des mathématiques ne révèle que très peu de chose et des choses très pauvres, comme la recherche de l'identité ou le caractère tautologique des propositions." Et il conclut cette introduction : "Nous voudrions montrer que les idées que nous inscrivons en tête de chacun de nos chapitres et qui nous paraissent dominer le mouvement de certaines théories mathématiques, pour être concevables indépendamment des mathématiques, ne sont pas néanmoins susceptibles d'une étude directe. Elles n'existent que par rapport à une matière qu'elles pénètrent d'intelligence, mais on peut dire qu'en revanche ce sont elles qui confèrent aux mathématiques leur éminente valeur philosophique." Ces lignes ont conservé toute leur actualité en 1976.

Son aîné de quelques années et ami, Jean Cavaillès, dès l'introduction de sa thèse principale : "méthode axiomatique et formalisme", malheureusement non rééditée et où il est fait référence explicitement aux travaux d'A. Lautman notait : "En France, après les théories de Poincaré, et sans doute sous leur influence, semble prédominer un courant empiriste... Baire, Borel, Lebesque sont tous empiristes." A. Lautman dénonça tout comme le fera Bourbaki, cette tendance philosophique inspirée de Kant, qui tend à privilégier l'intuition et le constructivisme. Avec le conventionalisme de Poincaré, on ne débouche pas sur le formalisme mais sur le scepticisme : il n'y a plus de point fixe nulle part, l'objectivité disparait du discours scientifique, qui devient une simple architecture de mots sans valeur.

Les géométries non-euclidiennes prouvèrent déjà, au XIXe siècle, la capacité de l'esprit de créer de toutes pièces un domaine de pensée dont la contradiction avec les "vérités intuitives" était flagrante. Les vieilles notions de définition et d'axiome immuables furent débordées par le courant des inventions nouvelles où les entités mathématiques sont introduites par de véritables définitions créatrices qui ne sont plus la description d'un donné empirique. Le réalisme de Frege en fut choqué comme le note Cavaillès dans sa thèse : "Le mathématicien ne peut pas créer arbitrairement quelque chose, aussi peu que le géographe ; lui aussi doit seulement découvrir ce qui est là et lui donner un nom (1)." Or, c'est justement l'opposé de la pensée de Dedekind : les nombres sont bien pour lui, comme ils étaient pour Hankel - contre qui s'insurge également Frege - des créations de l'esprit humain : "je conseillerais plutôt, écrit-il à Weber, de ne pas entendre par nombre, la classe même, mais quelque chose de nouveau.... que l'esprit engendre, nous sommes de race divine et possédons ... le pouvoir de créer." En libérant ainsi les mathématiques de la tâche de décrire un domaine, intuitif et donné, on fit une véritable révolution, dont les conséquences scientifiques et philosophiques ne sont pas toujours appréciées à leur juste valeur. Désormais les hypothèses de départ sont ajustées aux conséquences qu'on a en vue et à celles qu'on désire éviter. Par contre, si la théorie est conçue comme une simple description, d'une réalité spirituelle ou matérielle qui existe déjà, on n'a plus du tout les mêmes droits à leur égard.

Sur ce point encore Albert Lautman fut d'accord avec Jean Cavaillès. "L'essence des mathématiques réside dans sa liberté" aimait-il à rappeler. Cette phrase de Cantor résume si bien sa vision des mathématiques que Suzanne Lautman a insisté pour que je la mette en exergue de cette communication. Certes, une telle conception de la science mathématique qui la rapproche d'autres activités humaines de production pose en termes nouveaux le problème de ses rapports avec le réel, de l'objectivité et de la subjectivité. Les empiristes modernes opposent volontiers la science au subjectivisme et au volontarisme. Or l'objectivité n'est jamais une donnée mais une conquête dont les pointes extrêmes sont l'axiomatique et la mathématique formelle. Elle est alors une tâche humaine qui exige travail et effort, pensaient Herbrand et Lautman.

Parfois cette philosophie des mathématiques est opposée au platonisme traditionnel fondement d'un certain réalisme des idées. Or Lautman tout au long de son oeuvre se réfère à Platon, mais à un Platon riche et vivant, pas à celui des scolastiques, partisans ou adversaires. Il lui emprunte son idée de la Dialectique dominatrice où les processus mathématiques plongent leurs racines, c'est la métaphysique avant la lettre. "Car il pensait - note Suzanne Lautman - que l'amour, la poésie, la contemplation d'oeuvres d'art, les mathématiques sont une même chose plus réelle que ce qu'on croit être réel." Il croyait profondément non seulement à l'unité des mathématiques elles-mêmes à travers toute leur diversité, mais aussi à l'unité de l'intelligence et de la culture, caractéristique indéniable d'une vocation philosophique qui ne s'est jamais démentie. Là, il y a nette divergence avec Cavaillès "qui cherche dans les mathématiques elles-mêmes le sens philosophique de la pensée mathématique - note A. Lautman dans une lettre à Fréchet du 1er février 1939 - ce sens m'apparait au contraire dans le rattachement à une métaphysique (ou Dialectique) dont elles sont le prolongement nécessaire. Elles constituent en somme la matière la plus proche des Idées. Il ne me semble pas que ce soit pour les mathématiques une diminution, cela leur confère au contraire un rôle exemplaire."

Tout au long de son article : "L'axiomatique et la méthode de division" A. Lautman insiste sur la possibilité de donner à la pensée axiomatique une tout autre portée que celle de la subsomption du particulier sous le général lors du passage des notions dites "élémentaires" aux notions abstraites et nouvelles. C'est bien plutôt l'analyse d'un "mixte" qui tend à dégager les notions simples auxquelles ce "mixte" participe, la méthode platonicienne de division telle que l'enseignent le "Sophiste" et le "Philèbe" pour laquelle l'unité de l'Etre est une unité de composition et un point de départ vers la recherche des principes qui s'unissent dans les idées. Des mathématiciens souvent associent l'effort d'abstraction axiomatique et l'idée de généralisation. La généralisation n'est pourtant, chez eux, que le conséquence des préoccupations plus essentielles. Ainsi M. Frechet dans "Les espaces abstraits"(2) note à propos de l'établissement préalable de la théorie des groupes abstraits : "L'avantage de ce procédé est double : d'une part, économie de pensée, économie de temps, économie même tout court par la réduction de plusieurs longues théories en une seule : d'autre part, pénétration plus grande dans la signification profonde des résultats définitifs" (souligné par moi M.L)

De même la théorie des ensembles abstraits devait se constituer pour fournir le fondement de l'analyse générale comme le souligne Jacques Hadamard dans son article de l'Enseignement mathématique de 1912: "Le continu fonctionnel... n'offre à notre esprit aucune image simple. L'intuition géométrique ne nous apprend rien, à priori, sur son compte. Nous sommes forcés de remédier à cette ignorance et nous ne pourrons le faire qu'analytiquement, en créant

.../...

à l'usage du continu fonctionnel un chapitre de la théorie des ensembles." Fréchet met justement en exergue de son livre ce paragraphe qui éclaire son dessein tout comme ce passage qu'il cite d'une lettre de Laplace à Lacroix : "Le rapprochement des méthodes sert à les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent leur vraie métaphysique" n'est-ce-pas le devoir du philosophe que de défendre cette conception de l'intelligence mathématique , issue du platonisme et du cartésianisme, contre tout ce qui la menace aujourd'hui ?

Hilbert avait bien admis, lui, que les mathématiques ont un contenu qui va bien au-delà de ce qui est pensable immédiatement et justifiable par l'intuition, comme la plupart des mathématiciens le reconnurent quand ils rencontrèrent des paradoxes. Le nominalisme qu'affichent certains est, comme un certain constructivisme, une philosophie paresseuse qui recule devant l'analyse logique : c'est un procédé commode pour se débarrasser des questions logiques et philosophiques en voyant des "symboles", des "conventions" et des "processus", là où il y a des "notions" premières et des "principes". Pour Descartes et Leibniz déjà, l'intuition est avant tout l'intuition intellectuelle, l'aperception du rapport logique de principe à conséquence ; tandis que Kant n'admet pas d'autre intuition que l'intuition sensible, et repousse avec force l'hypothèse d'une intuition intellectuelle qui est pour lui le vice fondamental de toutes les métaphysiques antérieures, y compris la métaphysique cartésienne. Tout au contraire, en cherchant les fondements logiques des mathématiques, en définissant leurs notions premières, en posant les axiomes, on tend à restituer aux "symboles" et aux "procéssus", mathématiques leur sens réel et objectif dont les philosophes nominalistes les dépouillent.

Pour le mathématicien, c'est dans le choix des définitions originales et des axiomes judicieux que réside la véritable invention. C'est par l'introduction de notions nouvelles, beaucoup plus que par des transformations de symboles ou la manipulation aveugle d'algorithmes que les mathématiques ont progressé et progresseront. Kant, lui, sépare et oppose complétement les mathématiques, non seulement à la métaphysique, mais à la philosophie tout entière, et notamment à la logique. Ce contre quoi s'était déjà élevé avec vigueur Louis Couturat au début de ce siècle, y voyant une mutilation de l'esprit, une méconnaissance de la science et de la culture.

Albert Lautman a réagi, lui, sur plusieurs plans et de différentes façons : tout d'abord, il accorde à la logique mathématique toute la considération qu'elle mérite, alors que Poincaré méprisait les travaux de Peano et de Russell et son amitié avec Jacques Herbrand, lui aussi trop tôt disparu, lui fut une aide stimulante. Ensuite il s'initie aux mathématiques en train de se faire : algèbre, topologie, théorie des groupes, théorie des nombres, nombres p-adiques, etc... persuadé qu'elles racontent une histoire plus cachée faite pour le philosophe qui, plus que quiconque, doit s'intéresser aux théories à peine ébauchées et pas seulement aux résultats définitivement acquis. Il pressent l'intérêt philosophique de la topologie algébrique alors en plein développement. Ainsi comprend-il combien est périmée l'idée simple que se faisaient les logicistes d'une antériorité absolue et univoque de la logique par rapport aux mathématiques. Elle doit faire place à une dialectique plus profonde du langage et de la pensée mathématiques, du local et du global, du continu et du discontinu. Pour lui c'est un problème philosophique fondamental que d'établir une théorie des rapports du continu et du discontinu, de l'arithmétique et de l'analyse, en scrutant les mécanismes des liaisons qui se manifestent dans la théorie analytique des nombres. Il veut "ainsi rendre évidente cette idée que la véritable logique n'est pas à priori par rapport aux mathématiques, mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister" (3) et se sépare ainsi de tout le courant logiciste. Le point de vue qu'il adopte est celui de Hilbert qui substitue à la méthode des définitions génétiques celle des définitions axiomatiques, et loin de vouloir reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir de la logique, introduit au contraire en passant de la logique à l'arithmétique et de l'arithmétique à l'analyse, de nouvelles variables et de nouveaux axiomes qui élargissent à chaque fois le domaine des conséquences. Enfin si la mathématique classique a été constructiviste, tout d'abord en ce qui concerne la définition des opérations de l'analyse à partir des opérations de l'arithmétique élémentaire, mais aussi et surtout en ce qui concerne la génération individuelle des nombres réels ou complexes à partir des nombres entiers, il souligne que l'algèbre moderne, elle, est au contraire axiomatique. Il en résulte qu'en se donnant les axiomes auxquels obéissent les éléments d'un groupe ou d'un corps, on se donne par là même, d'un coup, la totalité souvent infinie des éléments du groupe ou du corps. Ces éléments ne sont plus, en général susceptibles d'être construits à partir des nombres entiers, ils peuvent être en fait de nature quelconque : nombres, vecteurs, opérateurs, fonctions, transformations, matrices, etc...

La philosophie semble s'être détachée de plus en plus de la science et méconnait maintenant son Esprit, ignorant l'antique tradition. Tradition encore vivace en France à la fin du XIXe siècle puisque dans le premier numéro de la Revue de métaphysique et de morale en 1893, Xavier Léon rappelait "la prédilection pour les sciences mathématiques, ce grand art aux ressources inépuisables né, lui aussi, de l'esprit humain". Albert Lautman toute sa vie a tenté de retrouver cette noble tradition comme en témoigne encore une de ses dernières publications ; "structure dialectique des mathématiques". Mais en 1976, ce véritable sol de la spéculation philosophique est ignoré par la plupart des philosophes devenus presque muets à son sujet. Les mathématiciens, eux, se réfugient, en général dans leur technicité et méprisent tous ces vains bavardages, ne se rendant pas compte que plus une science est élaborée, plus elle a besoin de conscience pour rester authentique. Ils sacrifient ainsi à la mode de notre époque où la rentabilité immédiate et sordide est proclamée du haut de tous les pouvoirs. Ne pas savoir le vrai et connaître seulement l'apparence sensible de ce qui est temporel et contingent, changeant et médiocre, voilà cette vanité qui s'est étalée et s'étale encore tous les jours dans les écrits contemporains et qui a le verbe haut.

Albert Lautman, au contraire, prouva sa confiance dans le pouvoir de l'esprit et nous montre le chemin d'une philosophie adéquate aux innovations scientifiques et à la culture face à toutes les démissions.

NOTES

(1) . Grundlagen der Arithmetik p. 108, Cavaillès p.57

(2) . P. 17.

(3) . Les schémas de structure p. 39