É. Cartan

# Les représentations linéaires des groupes finis

*Séminaire de Mathématiques (Julia)*, tome 1 (1933-1934), exp. nº 6, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A6_0>

Exemplaire n° 6
Institut Henri Poincaré

# SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Première année 1933-1934

## Théorie des Groupes et des Algèbres

## F.- Les représentations linéaires des groupes finis.

Exposé fait par M. E. CARTAN, le 19 Février 1934.

Le problème de la représentation linéaire des groupes finis peut être abordé par deux méthodes distinctes :

I°- Une méthode qui utilise la théorie des systèmes de nombres hypercomplexes semi-simples; elle donne immédiatement quelques uns des théorèmes fondamentaux.

2°- Une méthode directe qui n'utilise pas la théorie précédente et qui permet d'entrer plus profondément dans la question.

Après quelques indications sommaires sur la première méthode, nous développerons surtout la seconde ; nous aurons ainsi un aperçu simple de la théorie des caractères dûe à Frobenius ( Sitzungsberichte Berlin I896-I897-I898-I899-I90I-I904) ; voir aussi Burnside ( Proceedings London Math. soc. I897-98-I904) et Schur ( Sitzungsber. Berlin I905)

Plan de l'exposé

A.- Aperçu rapide sur la première méthode.

B.- Quelques propriétés des formes d'Hermite et des substitutions linéaires.

C.- Groupes finis de substitutions linéaires ; groupes irréductibles et réductibles; théorèmes de réductibilité complète.

D.- Groupes irréductibles; théorèmes d'orthogonalité; caractères.

E.- Groupes réductibles ; caractères.

F.- Théorèmes fondamentaux sur les représentations linéaires d'un groupe fini.

G - Détermination des caractères des représentants linéaires irréductibles d'un groupe .

A.- APERCU RAPIDE SUR LA 1ère METHODE

I.- Considérons un système de nombres hypercomplexes d'ordre n construit sur le corps des nombres complexes ordinaires ; soit unebase $e_1, e_2 \dots e_n$ de ce système , et

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n$$

un nombre quelconque du système ; soient enfin :

$$e_i e_j = \sum_k \gamma_{ij}^k e_k$$

les $\gamma_{ij}^k$ étant des nombres complexes ordinaires, les formules de multiplication .

On appelle <u>équation caractéristique</u> du système l'équation :

$$\varphi(\omega) = \left| \delta_{ij}\,\omega - \sum_K a^k \gamma_{ik}^j \right|_{ij} = 0 \qquad \delta_{ij} \begin{cases} =0 \text{ si } i \neq j \\ =1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant l'existence d'un nombre x du système tel que $x\,a = \omega\, x$ , $\omega$ étant un nombre complexe ordinaire .

En exprimant l'existence d'un nombre y du système tel que $a\,y = \omega\, y$ , on obtient une autre équation caractéristique :

$$\overline{\varphi}(\omega) = \left| \delta_{ij}\,\omega - \sum_K a^k \gamma_{ki}^j \right|_{ij} = 0$$

On appelle <u>trace</u> du nombre a du système, la somme des racines de l'équation caractéristique :

$$\sigma(a) = \sum_{i,k} \gamma_{ik}^i a^k$$

La forme quadratique : $\sigma(a^2) = \sum_{i,j,k,h} \gamma^j_{ik} a^k a^h$ trace de $a^2$ ( et égale à la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à $a$) joue un rôle fondamental : <u>la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit semi-simple est que le discriminant de cette forme ne soit pas nul</u>. Dans le cas contraire, on obtient le radical du système en annulant les dérivées partielles de la forme par rapport aux $a^k$. Les mêmes propriétés ont lieu relativement à la forme :

$\bar{\sigma}(a^2) = \sum_{i,j,h,k} \gamma^j_{ki}\gamma^i_{kj} a^k a^h$ , liée à l'équation $\bar{\varphi}(\omega)=0$

Rappelons d'autre part qu'un système de nombres complexes semi-simple se décompose en systèmes simples dont chacun admet une base matricielle .

2.- Appliquons ce qui précède à un groupe fini G formé de r éléments : $e_0 = 1 \quad e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ .

Ces r éléments peuvent être regardés comme formant la base d'un système de nombres hypercomplexes (algèbre du groupe) avec une loi de multiplication de la forme :

$e_i e_j = e_h$ . Dans la forme $\sigma(a^2)$ , les seuls termes à coefficients non nuls correspondront donc à :

$$\gamma^j_{ki} = \gamma^i_{kj} = 1 \quad \text{ou} \quad e_k e_i = e_j , \quad e_h e_j = e_i$$

d'où $e_h e_k e_i = e_i$ , soit $e_k e_h = 1$

c'est à dire que le produit $a^k a^h$ ne se présentera que si $e_k$ et $e_h$ sont inverses , son coefficient sera alors r.

On a donc :

$$\sigma(a^2) = r \sum a^k a^h \qquad ( e_k = e_h^{-1} )$$

Il est évident que cette forme a son discriminant différent de zéro; par suite l'algèbre du groupe est semi-simple chacun des sous-sytèmes simples définit une représentation linéaire irréductible du groupe G . Si en effet, l'algèbre du groupe se décompose en h sous-systèmes simples et si $e_{ij}^{(\alpha)}$ ( i,j = 1,2.... $n_\alpha$ ) constituent la base matricielle du $\alpha$ième sous-système, si enfin, on a :

$$e_i = \sum_{h,k,\alpha} a_{kh}^{\alpha} e_{kh}^{\alpha}$$

la matrice de rang $n_\alpha$ dont les éléments sont $a_{kh}^{\alpha}$ définit une représentation de G, cette matrice représentant l'élément $e_i$ de G . Cette représentation est irréductible . On obtient ainsi toutes les représentations irréductibles ; en effet, une représentation irréductible fournit un système simple de nombres hypercomplexes homomorphe à l'algèbre du groupe et par suite identique à l'un des sous-systèmes simples de cette algèbre .

On a $r = \sum_\alpha n_\alpha^2$. Le nombre des représentations irréductibles est égal à l'ordre du centre de l'algèbre du groupe , c'est à dire , comme nous le verrons, au nombre de classes d'éléments conjugués du groupe .

3.- Ajoutons que le point de vue précédent apportedes compléments intéressants au point de vue réel. L'algèbre du groupe peut en effet être regardée comme construite sur le corps des nombres réels; à ce point de vue elle constitue encore une algèbre semi-simple , mais ses sous-systèmes simples peuvent être de trois formes distinctes :

a) on peut avoir un sous-système d'ordre $n^2$ à base matricielle construit sur le corps des nombres réels .

b) on peut avoir un sous-système d'ordre $2n^2$ à base matricielle $e_{ij}$ $(i,j = 1,2....n)$, les coefficients desunités de base étant les nombres complexes ordinaires .

c) on peut avoir un sous-système d'ordre $4n^2$ à base matricielle $e_{ij}$ $( i,j =1,2.. .n)$, les coefficients des unités de base étant des quaterni~~x~~ons .

La différence entre le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs de la forme quadratique réelle $\sigma(a^2)$ est égale à la différence entre la somme des rangs (n) des sous-systèmes simples de la première catégorie,et la somme des rangs (2n) de ceux de la troisième . Or dans le cas d'un groupe G, cette différence est égale, manifestement au nombre de ceux des éléments du groupe dont le carré est égal à l'unité ( l'unité étant comptée).

Pour toutes ces questions, voir E.CARTAN, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse I2 (I898 )"Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres hypercomplexes".

II.-METHODE DIRECTE. PRELIMINAIRES

FORMES D'HERMITE

---

4.- Une forme d'Hermite à n variables complexes $x_1, x_2 \dots x_n$

est une forme bilinéaire par rapport aux deux séries de variables $x_i$ et $\overline{x}_i$ :

$$F(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{x}_j \qquad (a_{ij} = \overline{a}_{ji})$$

Comme les formes quadratiques, les formes d'Hermite sont réductibles à une somme de carrés de modules $\sum a_i x_i \overline{x}_i$ ($a_i$ réel). La forme est dite <u>définie</u> si elle ne s'annule que pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Deux formes d'Hermite, dont l'une F est définie positivement, peuvent toujours être ramenées simultanément à être :

$$F = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \dots + x_n\overline{x}_n \quad \text{(forme unitaire)}$$

$$\Phi = a_1 x_1 \overline{x}_1 + a_2 x_2 \overline{x}_2 + \dots + a_n x_n \overline{x}_n$$

( on trouvera une démonstration géométrique dans E.Cartan leçons sur la géométrie projective complexe, p.150).

Regardons $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme les composantes d'un vecteur dans un espace à n dimensions (complexes) . Deux vecteurs X, X' sont dits orthogonaux par rapport à la forme d'Hermite F si l'on a :

$$\sum_i x'_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum x_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0$$

( les deux premiers membres sont conjugués ).

Deux variétés planes passant par l'origine sont <u>complètement orthogonales</u>, si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre . Si la forme F est définie deux vecteurs orthogonaux ne peuvent avoir la même direction et deux variétés planes orthogonales n'ont aucun vecteur commun .

5.- On appelle substitution linéaire unitaire, une substitution linéaire laissant invariante la forme d'Hermite unitaire si $(a_{ij})$ est la matrice d'une telle substitution, on a :

$$\sum_K a_{ik} \bar{a}_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

La substitution inverse a pour éléments $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ; sa matrice est la complexe conjuguée de la transposée de la matrice qui représente la première substitution.

Si une substitution linéaire unitaire laisse invariante une variété plane passant par l'origine, elle laisse invariante la variété plane lieu des vecteurs orthogonaux à la variété donnée ( par rapport à la forme d'Hermite unitaire) Il y a réciprocité entre ces deux variétés planes, la somme de leurs dimensions est n.

6.- On appelle équation caractéristique d'une substitution linéaire S ou matrice $(a_{ij})$ l'équation $\Delta(\omega) = 0$ où $\Delta(\omega)$ est le déterminant de la matrice $(\delta_{ij}\omega - a_{ij})$ Les racines de l'équation caractéristique sont les racines caractéristiques ou racines latentes de S; leur somme $\sum_i a_{ii}$ est la trace de S.

L'équation caractéristique de $A^{-1}SA$ ( $A \neq 0$) transformée de S par A est identique à celle de S ; il en est donc de même de la trace. Par suite, SS' et S'S ont même trace.

Deux substitutions unitaires inverses l'une de l'autre ont des traces complexes conjuguées .

Si l'on forme la matrice $\Delta(S)$ ( c'est un polynome de degré n en S ), elle est identiquement nulle ( Cayley) Il peut arriver qu'il existe un polynome $\psi(S)$ de degré $< n$ qui soit identiquement nul ; si $\psi$ est du degré minimum ce degré est le rang de la matrice . Les racines de $\psi(\omega)$ sont identiques à celles de $\Delta(\omega)$ et $\Delta(\omega)$ est naturellement divisible par $\psi(\omega)$ comme tout polynome $\varphi(\omega)$ tel que la matrice $\varphi(S)$ soit identiquement nulle . Si, par exemple, $S^p = 1$ , la trace de S est une somme de n racines p ièmes de l'unité .

## C.- GROUPES IRREDUCTIBLES & GROUPES REDUCTIBLES DE SUBSTITUTIONS LINEAIRES .

7.- Un groupe de substitutions linéaires à n variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ est dit réductible si l'on peut trouver $p < n$ combinaisons linéaires indépendantes des $x_i$ :

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad ( i = 1, 2 \ldots p )$$

telles que les transformées de chacune des formes $X_i$ par une substitution quelconque du groupe soient des combinaisons linéaires de $X_1, X_2 \ldots X_p$. Par un changement linéaire de variables, on peut obtenir que les p premières variables $x_1, x_2 \ldots x_p$ soient transformées entre elles, les coefficients $a_{i,p+1}, \ldots a_{i,n}$ étant nuls pour $i = 1, 2 \ldots p$).

Un groupe qui n'est pas réductible est dit irréductible

Théorème de réductibilité complète .

Tout groupe fini de substitutions linéaires est irréductible ou décomposable en groupes irréductibles .

Cet énoncé signifie qu'on peut, par un changement linéaire de variables , supposer partagées les variables en un certain nombre de séries :

$x_1 , x_2 \dots . x_p$ ; $y_1 , y_2 \dots . y_q$ ; $z_1 , z_2 \dots . z_s$

telles que les $x_i$ soient transformées entre elles par un groupe irréductible ,etc ....

La démonstration repose sur le :

Lemme fondamental : Tout groupe fini de substitutions linéaire ~~xxxxxxxxx~~ laisse invariante au moins une forme d'Hermite définie positive .En effet, soit F (x) une forme définie positive donnée, par exemple la forme unitaire ; soient : $S_0 = E$ , $S_1$ .... $S_{n-1}$ les substitutions du groupe ; considérons la forme :

$$\Phi(x) = F_0(x) + F_0(S_1 x) + F_0(S_2 x) + \dots + F_0(S_n x)$$

elle est définie positive et évidemment invariante par G.

Ceci posé, si G est réductible, si par exemple, les variables $x_1 , x_2 \dots x_p$ sont transformées entre elles par G, cela veut dire que G laisse invariante la variété plane $x_1 = x_2 = \dots . = x_p = 0$ ; elle laisse donc invariante la variété orthogonale complémentaire , comme elle n'a aucun vecteur commun avec la première, on peut la supposer définie par $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots . = x_n = 0$ ; par suite, chaque opération de G se décompose en une substitution linéaire opérant sur les $x_i$ ($i \leq p$) et une substitution opérant sur les $x_i$ ($i > p$). Si les deux groupes ainsi obtenus sont réductibles ( ou l'un d'eux) on continuera la réduction .

## D.-PROPRIETES DES GROUPES IRREDUCTIBLES
## THEOREMES D'ORTHOGONALITE. CARACTERES

8.- Lemme fondamental .

Tout groupe irréductible fini laisse invariante une seule forme d'Hermite ( à un facteur constant près).

Supposons en effet que le groupe laisse invariantes deux formes distinctes F et $\Phi$ , la première étant définie positive . On peut les réduire simultanément aux formes :

$$F = x_1\overline{x}_1 + \ldots\ldots + x_n\overline{x}_n$$
$$\Phi = a_1 x_1\overline{x}_1 + \ldots\ldots + a_n x_n\overline{x}_n$$

Si l'on n'avait pas $a_1 = a_2 \ldots\ldots = a_n$, on aurait ( en changeant au besoin l'ordre des variables) : $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_n$ les p premiers coefficients étant différents de $a_n$ ; la forme

$$\Phi - a F = (a_1 - a_n)\, x_1\overline{x}_1 + \ldots\ldots + (a_p - a_n)\, x_p\overline{x}_p$$

serait alors invariante par les substitutions du groupe ainsi que la variété $x_1 = x_2 \ldots\ldots = x_p \neq 0$ et le groupe ne serait pas irréductible .

9.- Théorème d'orthogonalité

Soit G un groupe fini irréductible unitaire et soient $a_{ij}(S)$ les éléments de la matrice S du groupe, on a :

$$\mathcal{M}\, a_{ij}(S)\ \overline{a}_{kh}(S) = \frac{1}{n}\,\delta_{ik}\,\delta_{jh}$$

en désignant par $\mathcal{M}\varphi(S)$ la valeur moyenne :

$$\mathcal{M}\varphi(S) = \frac{1}{r}\left[\ \varphi(S) + \varphi(S_1) + \ldots\ldots + \varphi(S_{r-1})\right]$$

Partons de la forme $F_0 = x_1\overline{x}_1$ ; elle donne naissance à la forme d'Hermite invariante :

$$\sum_S a_{1i}(S)\ \overline{a}_{1j}(S)\ x_i\overline{x}_j = \lambda \sum_1 x_i\overline{x}_i$$

d'où $\mathcal{M}\, a_{1i}\,\overline{a}_{1j} = 0$ si $i \neq j$ et $\mathcal{M}\, a_{1i}\,\overline{a}_{1i} = \lambda$

Mais on a pour chaque substitution du groupe :

$$\sum_1 a_{1i}\,\overline{a}_{1i} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}\sum_1 a_{1i}\,\overline{a}_{1i} = n\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{n}$$

Le théorème est donc démontré pour i=k=1 c'est à dire pour i= K .

La considération de la substitution $S^{-1}$ du groupe ramène le cas j=h au cas précédent .

Partons maintenant de la forme $x_1\overline{x}_2$ ( ce n'est pas une forme d'Hermite, mais une combinaison linéaire de deux formes d'Hermite $\frac{1}{2}(x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1)$ et $\frac{1}{2}(x_1\overline{x}_2 - x_2\overline{x}_1)$

elle donne naissance à la forme suivante :

$$\sum_S a_{1i}(S)\ \overline{a}_{2j}(S)\ x_i\overline{x}_j = \mu \sum_1 x_i\overline{x}_i \quad (\mu \text{ complexe})$$

mais en prenant i=j on voit que $\mu = 0$ , donc $\mathcal{M}\, a_{1i}\,\overline{a}_{2j} = 0$

IO.- Caractères d'un groupe irréductible.

Soit $\chi(S)$ la trace $\sum a_{ii}(S)$ de la matrice S .

On a :

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}(S) = \mathcal{M}a_{11}\bar{a}_{11} + \mathcal{M}a_{22}\bar{a}_{22} + \ldots + \mathcal{M}a_{nn}\bar{a}_{nn} = n\frac{1}{n} = 1$$

Comme la trace ne change pas par un changement de variables on en déduit que :

La valeur moyenne du carré du module du caractère d'un groupe fini irréductible est égale à 1 .

Ce théorème est valable même si le groupe n'est pas unitaire .

Dans ce cas, deux substitutions inverses ont des caractères complexes conjugués .

Corollaire : Il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients fixes des éléments de la matrice S qui soit nulle pour toutes les matrices d'un groupe fini irréductible.

E.- GROUPES REDUCTIBLES . CARACTERES

11.- Considérons un groupe fini qui se décompose en deux groupes irréductibles l'un à p variables $x_1, x_2 \ldots x_p$ l'autre à q variables $y_1, y_2 \ldots y_q$ .

Lemme fondamental .- Si les deux groupes irréductibles composants ne sont pas équivalents, le groupe donné ne laisse invariantes que les formes d'Hermite $aF(x) + b\Phi(x)$ où a et b sont des constantes arbitraires, F la forme invariante par le premier groupe composant, $\Phi$ la forme d'Hermite invariante par le second groupe composant .

Toute forme d'Hermite aux p+q variables $x_i, y_j \ldots$ peut se mettre sous la forme :

$$F_1(x) + \Phi_1(x) + \psi(x,\overline{y}) + \overline{\psi}(\overline{x},y)$$

$\psi$ étant bilinéaire par rapport aux deux séries de variables $x_i\ \overline{y}_j$. Il est évident que $F_1(x)$ est de la forme $aF(x)$ et $\Phi_1(y)$ de la forme $b\,\Phi(y)$. Supposons la forme $\psi$ non identiquement nulle ; supposons par exemple, que, parmi les coefficients de $x_1, x_2 \ldots x_r$ il y ait $\ell$ formes linéairement indépendantes en $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \ldots \overline{y}_q$ ; on peut alors ramener $\psi$, par un changement linéaire de variables, à la forme :

$$\psi(x,\overline{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_\ell\overline{y}_\ell$$

Mais alors le premier groupe composant transforme entre elles les variables $x_1, x_2 \ldots x_\ell$ donc $p=q=\ell$. D'autre part, rien n'empêche de supposer la forme F unitaire ; alors chaque substitution de G, laissant invariante la forme $\psi$ transforme entre elles les variables y de la même manière que les variables x ; autrement dit, les deux groupes composants sont équivalents ( et rendus simultanément unitaires) . S'ils ne sont pas équivalents, les seules formes invariantes sont $aF(x) + b\,\overline{\Phi}(y)$.

I2.- Cas général .

Le lemme précédent se généralise immédiatement :

Théorème fondamental :

Si un groupe linéaire fini G se décompose en groupes irréductibles, à savoir :

un groupe $G^{(1)}$ se présentant $p_1$ fois ( c'est à dire $p_1$ groupes irréductibles équivalent

un groupe $G^{(2)}$ se présentant $p_2$ fois

.........

un groupe $G^{(k)}$ se présentant $p_k$ fois alors si ces groupes composants ( et par suite le groupe donné) sont rendus unitaires, on a :

$$\mathcal{M}\, a^{(\alpha)}_{ij}\, \bar{a}^{(\beta)}_{kh} = 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta$$

La démonstration est immédiate . Le résultat reste évidemment vrai si les groupes ne sont pas unitaires .

Corollaire . On a même si les groupes composants ne sont pas unitaires et si $\chi(S)$ désigne le caractère du groupe total:

$$\mathcal{M}\, \chi^{(\alpha)}(S)\, \bar{\chi}^{(\beta)}(S) = 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta$$

$$\mathcal{M}\, \chi^{(\alpha)}(S)\, \bar{\chi}^{(\alpha)}(S) = 1$$

$$\mathcal{M}\, \chi(S)\, \bar{\chi}^{(\alpha)}(S) = p_\alpha$$

$$\mathcal{M}\, \chi(S)\, \bar{\chi}(S) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_h^2 .$$

En effet, $\chi(S) = p_1\chi^{(1)}(S) + p_2\chi^{(2)}(S) + \dots + p_h\chi^{(h)}(S)$.

## F.- LES THEOREMES FONDAMENTAUX SUR LA REPRESENTATION LINEAIRE D'UN GROUPE FINI ABSTRAIT

---

I3.- Soit un groupe abstrait G formé de r éléments :

$e_0 = 1 \quad e_1, e_2 \dots e_{r-1}$ .

Ce groupe admet une représentation linéaire fidèle, c'est la représentation régulière , donnant un groupe linéaire $\mathcal{G}$ à r variables $x_0, x_1 \dots x_{r-1}$. L'opération $S_i$ de $\mathcal{G}$ qui correspond à l'élément $e_i$ de G est la substitution linéaire qui transforme la variable $x_k$ dans la variable $x_{k'}$ si :

$$e_{k'} = e_i \, e_k \; .$$

Nous allons ~~étudier~~ la réduction complète du groupe $\mathcal{G}$ et montrer qu'elle fournit toutes les représentations linéaires irréductibles de G .

Soit $\chi(e_i)$ le caractère de l'opération $S_i$ de $\mathcal{G}$. On a manifestement :

$$\chi(e_0) = r \quad \chi(e_1) = \chi(e_2) = \ldots = \chi(e_{r-1}) = 0$$

par suite : $\mathcal{M}\,\chi(S)\,\bar{\chi}(S) = r$ (1)

Si donc la réduction complète de $\mathcal{G}$ donne k groupes irréductibles composants non équivalents :

$\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \ldots\ldots, \mathcal{G}^{(k)}$, le groupe $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ entrant $p_\alpha$ fois , on a :

$$r = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_k^2 \; . \qquad (2)$$

Soit d'autre part, $n_\alpha$ le nombre de variables transformées par $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ ; on a évidemment :

$$\mathcal{M}\,\chi^{(\alpha)}(S)\,\bar{\chi}(S) = n_\alpha \quad \text{puisque} \quad \bar{\chi}(S_0) = r \quad \bar{\chi}(S_i) = 0$$

$$\mathcal{M}\,\chi^{(\alpha)}(S)\,\bar{\chi}(S) = \mathcal{M}\,\chi^{(\alpha)}(S)\left[\sum p_\beta\,\bar{\chi}(S)\right] = p_\alpha$$

d'où $n_\alpha = p_\alpha$ .

Théorème

Dans la réduction complète de $\mathcal{G}$, chaque groupe composant $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ entre autant de fois qu'il y a de variables transformées par $\mathcal{G}^{(\alpha)}$.

I4.- Corollaire

Les coefficients $a_{ij}^{(\alpha)}(S)$ des matrices des différents groupes composants sont au nombre de :

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots\ldots + n_\alpha^2 = r$$

et il n'existe entre eux aucune relation linéaire à coefficients constants . <u>Si donc, les groupes composants sont rendus unitaires, leurs coefficients déterminent dans l'espace du groupe un système orthogonal complet</u> .

I5. <u>Théorème</u>.- <u>Il n'existe pas d'autre représentant linéaire irréductible du groupe abstrait donné que ceux qui se présentent dans la réduction de $\mathcal{G}$</u>.

En effet, s'il en existait un autre, tout élément $c_{ij}(S)$ d'une substitution S serait de la forme :

$$c_{ij}(S) = \sum_{k,h,\alpha} \lambda_{kh}^{(\alpha)} a_{kh}^{(\alpha)}(S)$$

Mais on connait :

$$\mathcal{M}\; c_{ij}(S)\, \overline{a}_{kh}^{(\alpha)}(S) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_{kh}^{(\alpha)} = 0$$

I6. Théorème.- <u>Le nombre des représentants linéaires non équivalents est égal au nombre des classes d'éléments conjugués du groupe donné</u> .

En effet, l'algèbre du groupe est susceptible de la base matricielle $e_{ij}^{(\alpha)}$ . Par suite, le <u>centre</u> de cette algèbre a pour base les h nombres hypercomplexes linéairement indépendants $\sum_{i=1,2\ldots n_\alpha} e_{ii}^{(\alpha)}$ ( $\alpha = 1,2\ldots h$ )

D'autre part, soit $\sum a_i e_i$ un nombre du centre ; on aura quelque soit i :

$$\sum_k a_k e_k e_i = \sum_k a_k e_i e_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_k a_k e_i^{-1} e_k e_i = \sum_k a_k e_k$$

Si donc, $e_k$ est un élément du groupe entrant avec le coefficient $a_k$ tous les éléments conjugués entreront avec le même coefficient . Il y a donc dans le centre exactement autant de nombres linéairement indépendants qu'il y a de classes d'éléments conjugués .

I7.- <u>Théorème</u> .- <u>Un représentant linéaire irréductible est complètement déterminé par les caractères de ses différents éléments</u> .

Car s'il existait deux représentants linéaires irréductibles non équivalents ( et n'ayant pas nécessairement le même nombre de variables), de caractères $\chi(S)$ et $\chi'(S)$ on aurait :

$$\mathcal{M}_S\, \chi(S)\, \bar{\chi}'(S) = 0$$

d'où, dans le cas qui nous occupe :

$$\mathcal{M}\, \chi(S)\, \bar{\chi}(S) = 0$$

I8.-<u>Théorème</u>.- <u>Les caractères des différents éléments d'un groupe linéaire fini sont des entiers algébriques</u> .

Soit S un élément du groupe , p l'exposant auquel il appartient ( $S^p = 1$ ) ; le caractère $\chi(S)$ est une somme de n racines p ièmes de l'unité ( n = nombre de variables transformées par le groupe ) . Si p = 1, $\chi(S) = n$ si p = 2, $\chi(S)$ est un entier naturel de même parité que n et inférieur ou égal à n-2 en valeur absolue .

## G.- DETERMINATION DES CARACTERES DES REPRESENTANTS IRREDUCTIBLES

I9.- Soit une représentation irréductible , $\chi^{(\alpha)}$ ses caractères . Appelons caractère d'un nombre $\sum a_k e_k$ de l'algèbre du groupe le nombre complexe ordinaire $\sum s_k \chi^{(\alpha)}(e_k)$ .

Ces caractères jouissent des propriétés suivantes :

1) $\chi^{(\alpha)}(e_i e_j) = \chi^{(\alpha)}(e_j e_i)$

2) Soient c et c' deux nombres quelconques du centre :

$$c = \sum_{\beta i} c_\beta \, e_{ii}^{(\beta)} \qquad c' = \sum_{\beta i} c'_\beta \, e_{ii}^{(\beta)}$$

On a :

$$\chi^{(\alpha)}(c)\,\chi^{(\alpha)}(c') = n_\alpha \chi^{(\alpha)}(cc') \quad \text{ou } n_\alpha c_\alpha . n_\alpha c'_\alpha = n_\alpha . n_\alpha c_\alpha c'_\alpha$$

3) On a la relation :

$$\sum_i \chi^{(\alpha)}(e_i)\,\bar{\chi}^{(\alpha)}(e_i) = r$$

Réciproquement, considérons dans l'espace du groupe une fonction linéaire $\xi(s) = \sum s_k \xi(e_k)$ satisfaisant aux conditions :

(1) $\xi(e_i e_j) = \xi(e_j e_i)$

(2) $\xi(c)\,\xi(c') = n\,\xi(cc')$

( n entier positif, et c' appartient au centre ).

(3) $\sum \xi(e_i)\,\bar{\xi}(e_i) = r$

les $\xi(e_i)$ sont les caractères d'une représentation linéaire irréductible .

En effet, la relation (1) montre que $\xi(e_i)$ est le même pour deux éléments conjugués du groupe abstrait .

Posons maintenant $\varepsilon_\alpha = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}^{(\alpha)}$ ; on a :

$$\varepsilon_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha \quad \text{et } \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 0 \quad (\text{ pour } \alpha \neq \beta\ ).$$

Les relations (2) donnent en faisant $c = c' = \varepsilon_\alpha$ , puis $c = \varepsilon_\alpha$ , $c' = \varepsilon_\beta$ :

$$[\xi(\varepsilon_\alpha)]^2 = n\,\xi(\alpha) \qquad \xi(\varepsilon_\alpha)\,\xi(\varepsilon_\beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

Il y a donc un seul $\xi(\mathcal{E}_\alpha)$ différent de zéro et égal à n. Il en résulte que $\xi(e_i) = \frac{n}{n_\alpha}\chi^{(\alpha)}(e_i)$. Mais (3) montre que $n = n_\alpha$, $\xi(e_i) = \chi^{(\alpha)}(e_i)$ .

20.- Supposons connu le caractère $\chi^{(\alpha)}$. Pour obtenir le groupe linéaire irréductible $\mathcal{G}^{(\alpha)}$, formons :

$$\chi^{(\alpha)}(s) = \sum_k a_k \chi^{(\alpha)}(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(\alpha)} .$$

Les nombres du centre dont le caractère est nul sont les combinaisons linéaires des $\mathcal{E}_\beta$ autres que $\mathcal{E}_\alpha$. L'ensemble des nombres de l'algèbre du groupe dont le produit par tous ces $\mathcal{E}_\beta$ est nul constitue le sous-système simple de base $e_{ii}^{(\alpha)}$. ( On peut encore prendre dans le centre un nombre ayant tous ses produits par les $\mathcal{E}_\beta$ nuls, à savoir $\mathcal{E}_\alpha$ . Les produits $\mathcal{E}_\alpha e_i$ donnent le sous-système simple cherché) . La recherche d'une base matricielle de ce sous-système est un problème qui a été exposé par M. Dieudonné ( Exposé D par. 6 ) . On peut encore remarquer que l'identification entre un nombre a du sous-système et le nombre $\sum a_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\alpha)}$ revient à la résolution des $n_\alpha$ équations suivantes où les a sont des fonctions linéaires inconnues des $a_{ij}^{(\alpha)}$ :

$$\chi^{(\alpha)}(a) = \sum_i a_{ii}^{(\alpha)}$$

$$\chi^{(\alpha)}(a^2) = \sum_{i,j} a_{ij}^{(\alpha)} a_{ji}^{(\alpha)}$$

$$\chi^{(\alpha)}(a^3) = \sum_{i,j,k} a_{ij}^{(\alpha)} a_{jk}^{(\alpha)} a_{ki}^{(\alpha)}$$

........

$$\chi^{(\alpha)}(a^{n_\alpha}) = \sum_{i \ldots i_{n_\alpha}} a_{i_1 i_2}^{(\alpha)} a_{i_2 i_3}^{(\alpha)} a_{i_3 i_4}^{(\alpha)} \ldots a_{i_{n_\alpha} i_1}^{(\alpha)}$$

Les seconds membres de ces équations sont des invariants de la matrice $(a_{ij}^{(\alpha)})$ par un changement linéaire de variables ( ce sont les sommes des puissances semblables des racines latentes de la matrice .

Si l'on choisit pour matrice représentative d'un nombre a, dont l'équation caractéristique a des racines latentes toutes distinctes, une matrice diagonale, ce qui entraine le choix des matrices représentatives de $a^2$, $a^3$ .... $a^{n_\alpha}$ toute solution des équations ci-dessus compatible avec les conditions précédentes donne, ou bien les matrices $\mathcal{G}^{(\alpha)}$, ou bien ces matrices transposées .

Au point de vue de la réalité, supposons les $\chi^{(\alpha)}(e_i)$ tous réels . La forme $\chi^{(\alpha)}(a^2)$ est une forme quadratique réelle de rang $n_\alpha$. La différence entre le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs est $n_\alpha$ ou $-n_\alpha$ ( ce dernier cas ne pouvant se présenter que si n est pair) Dans le premier cas, on peut choisir une base matricielle réelle , le groupe $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ étant ainsi à coefficients réels . Dans le second cas, on peut trouver pour $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ un groupe linéaire à $\frac{n_\alpha}{2}$ variables quaternioniennes à paramètres quaternioniens .

Si les $\chi^{(\alpha)}(e_i)$ ne sont pas tous réels, il existe un autre représentant linéaire $\mathcal{G}^{(\beta)}$ tel que $\chi^{(\beta)}(e_i) = \overline{\chi}^{(\alpha)}(e_i)$ avec le même nombre $n_\beta = n_\alpha$ de variables .

Par exemple , le groupe alterné de quatre lettres admet deux représentants linéaires imaginaires conjugués à une variable .

Le groupe symétrique de n lettres admet des caractères tous entiers naturels et des réprésentants tous à coefficients réels et même entiers . Il n'en est plus de même pour le groupe alterné .

---

Références .

Van der Werden , Moderne Algebra Bd. II, chap. XVII
( surtout la fin)

Weyl Gruppen Theorie und Quantenmechanik .

---