Séminaire Lelong.
Analyse

LEOPOLDO NACHBIN

Fonctions analytiques et quasi-analytiques vectorielles et le problème d'approximation de Bernstein

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A6_0>

FONCTIONS ANALYTIQUES ET QUASI-ANALYTIQUES VECTORIELLES ET LE PROBLÈME D'APPROXIMATION DE BERNSTEIN

par Leopoldo NACHBIN

1. - Nous nous proposons d'étudier le problème d'approximation de Bernstein, c'est-à-dire l'approximation polynomiale pondérée. Il s'agit là de l'approximation uniforme sur des parties non compactes d'un espace, mais, en réalité, sur des parties qui sont la trace sur l'espace en question des parties compactes d'un espace plus grand. Une compensation pour le fait qu'on approxime uniformément sur des parties non compactes (où certaines fonctions peuvent être non bornées), consiste, comme il est classique, dans l'utilisation de "poids". Pour construire une théorie de l'approximation pondérée, d'une façon suffisamment générale pour qu'elle englobe les cas simples connus, il faut envisager des poids de deux côtés. D'une part, dans la définition d'un espace vectoriel topologique pondéré, les poids sont utilisés pour l'introduction d'un tel espace. D'autre part, on considère un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique pondéré, ce sous-espace étant un module sur une certaine algèbre, par rapport à laquelle ses éléments sont des poids. Il s'agit de développer une théorie générale du problème d'approximation de Bernstein analogue à celle qu'adopte STONE dans le cas du problème d'approximation de Weierstrass. Dans ce dernier cas, on se contente usuellement de décrire l'adhérence d'une sous-algèbre. Ici, au contraire, il faut tâcher de décrire l'adhérence d'un module sur une sous-algèbre : c'est un point de vue plus général, parce qu'une sous-algèbre est un module sur elle-même. Dans le conception du problème d'approximation de Bernstein qui nous occupera, il y aura un espace topologique E, qui est ouvert et dense dans un autre espace topologique plus grand $\hat{E}$ (la frontière est notée ∂E). Par ailleurs on considère un ensemble de poids S définissant un espace vectoriel topologique pondérée, un sous-espace vectoriel $\mathfrak{W}$ d'un tel espace, $\mathfrak{W}$ étant aussi un ensemble de poids au sens que $\mathfrak{W}$ est un $\mathfrak{A}$-module sur une algèbre $\mathfrak{A}$. Le cas du théorème de Weierstrass-Stone correspond à $E = \hat{E}$ (donc ∂E vide), S réduit à la fonction constante 1, donc pas de poids visible du côté de la topologie, et $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$. On notera toutefois que la seule hypothèse à retenir pour arriver aux mêmes conclusions est la première ; donc on appellera problème d'approximation de Weierstrass, le cas particulier du problème d'approximation de Bernstein où $E = \hat{E}$, c'est-à-dire $\partial E = \emptyset$.

2. - Pour tout espace topologique uniformisable séparé E, soit $C(E)$ l'algèbre topologique des fonctions réelles continues sur E, munie de la topologie compacte. $C_b(E)$ sera l'algèbre de Banach des fonctions appartenant à $C(E)$ qui sont bornées, munie de la norme du supremum. Si E est localement compact, $C_0(E)$ est l'idéal fermé de $C_b(E)$ des fonctions s'annulant à l'infini, considéré comme une algèbre de Banach. $K(E)$ est l'idéal de $C(E)$ des fonctions à supports compacts.

Le problème d'approximation de Bernstein pour les fonctions continues se présente classiquement sous des formes variées, dont nous citons la suivante. Soit $s \geqslant 0$ une fonction réelle positive semi-continue supérieurement sur R^n. Indiquons par $Cs_b(R^n)$ l'espace vectoriel des $f \in C(R^n)$ telles que sf soit bornée, muni de la semi-norme

$$f \to \sup\{s(x)\ |f(x)|\ ;\ x \in R^n\} \quad .$$

Alors $K(R^n)$ est contenu dans $Cs_b(R^n)$ et son adhérence est l'espace vectoriel $Cs_0(R^n)$ des $f \in C(R^n)$ telles que sf s'annule à l'infini. Supposons de plus que s soit un poids par rapport à l'algèbre P_n des polynômes réels sur R^n, c'est-à-dire que $P_n \subset Cs_b(R^n)$, ce qui équivaut à $P_n \subset Cs_0(R^n)$; on exprime ceci en disant que s est à décroissance rapide à l'infini. Le problème d'approximation de Bernstein consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes partant sur s pour que P_n soit dense dans $Cs_0(R^n)$; on dit alors que s est un poids fondamental. On indiquera par $\mathfrak{B}_n$ l'ensemble des fonctions réelles positives semi-continues supérieurement s qui sont des poids fondamentaux sur R^n. On désignera par B_n l'ensemble des fonctions réelles positives semi-continues supérieurement s telles que s^a soit un poids fondamental sur R^n pour n'importe quel exposant réel $a > 0$. On a $B_n \subset \mathfrak{B}_n$.

Soit E un espace topologique uniformisable séparé, sous-espace topologique ouvert et dense d'un autre espace topologique uniformisable séparé $\hat{E}$. On indiquera par ∂E la frontière de E dans $\hat{E}$, donc fermée dans $\hat{E}$. Considérons un ensemble S de fonctions réelles positives semi-continues supérieurement sur E. Désignons par $CS_b(E, \hat{E})$ le sous-espace vectoriel de $C(E)$ des f telles que, quels que soient $a \in \partial E$ et $s \in S$, sf reste bornée au point a (il existe un voisinage V de a dans $\hat{E}$ tel que sf soit bornée sur $V \cap E$). On considérera $CS_b(E, \hat{E})$ comme un espace vectoriel topologique localement convexe ; sa topologie est définie par la famille de semi-normes :

$$f \in CS_b(E, \hat{E}) \to \sup\{s(x)\ |f(x)|\ ;\ x \in K \cap E\}$$

où $s \in S$ et $K \subset \hat{E}$ compact sont arbitraires. Soit $CS_0(E , \hat{E})$ le sous-espace vectoriel topologique de $CS_b(E , \hat{E})$ des f telles que, quels que soient $a \in \partial E$ et $s \in S$, sf tend vers la limite 0 au point a (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a dans $\hat{E}$ tel que sf soit bornée en valeur absolue par ε sur $V \cap E$). Remarquons que $CS_0(E , \hat{E})$ contient toujours l'espace vectoriel $K(E , \hat{E})$ des $f \in C(E)$ dont le support dans E (fermé dans E et disjoint de ∂E) est aussi fermé dans $\hat{E}$. Ajoutons que $K(E , \hat{E})$ est dense dans $CS_0(E , \hat{E})$, et que l'adhérence de $K(E , \hat{E})$ dans $CS_b(E , \hat{E})$ est identique à $CS_0(E , \hat{E})$ si on ajoute des conditions simples, telles que $\hat{E}$ soit localement compact, ou métrisable. $CS_b(E , \hat{E})$ et $CS_0(E , \hat{E})$ sont des $C_b(E)$-modules. Notons que, sans changer les espaces vectoriels topologiques pondérés $CS_b(E , \hat{E})$ et $CS_0(E , \hat{E})$, on peut toujours remplacer S par un ensemble plus grand qui soit filtrant. Dans la suite, nous allons supposer que S est déjà tel que l'ensemble des semi-normes en question soit filtrant. Si E est localement compact et si $\hat{E}$ est n'importe quelle compactification de E, alors, en prenant S réduit à la fonction constante 1, on aura

$$CS_b(E , \hat{E}) = C_b(E) , \qquad CS_0(E , \hat{E}) = C_0(E) , \qquad K(E , \hat{E}) = K(E) .$$

Dans la pratique on pense à $\hat{E}$ comme étant la compactification d'Alexandroff.

3. - Soit $\mathfrak{W}$ un sous-espace vectoriel de $CS_0(E , \hat{E})$ et $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre de $C(E)$ contenant l'unité tels que $\mathfrak{W}$ soit un $\mathfrak{A}$-module, donc $\mathfrak{A}\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$. Le problème d'approximation de Bernstein consiste, sous de telles conditions, à se demander quelle est l'adhérence de $\mathfrak{W}$ dans $CS_0(E , \hat{E})$; et, en particulier, à chercher des conditions pour que $\mathfrak{W}$ soit dense dans $CS_0(E , \hat{E})$. Le problème d'approximation de Bernstein n'est pas encore résolu, ni sous cette forme générale, ni même dans des cas particuliers connus, à cause des difficultés analytiques auxquelles il donne lieu. Nous allons considérer une version plus stricte de ce problème. Remarquons, pour celà, que dans le cas particulier où $\mathfrak{A}$ consiste seulement en fonctions constantes, $\mathfrak{W}$ est le sous-espace vectoriel le plus général de $CS_0(E , \hat{E})$ et il n'y a pas grand chose à dire en ce qui concerne l'adhérence de $\mathfrak{W}$, sauf pour ce qui résulte du théorème de Hahn-Banach. Ce cas particulier étant trop général, dans quel sens étudier le problème d'approximation de Bernstein ? La façon qu'on adoptera d'aborder l'étude de ce problème consiste précisément à ramener le cas général au cas particulier indiqué, moyennant la notion de localisabilité, en envisageant les ensembles de E où les fonctions appartenant à $\mathfrak{A}$ sont des constantes. Considérons la relation d'équivalence $E/\mathfrak{A}$ sur E définie par $\mathfrak{A}$ quand on considère deux éléments $x , y \in E$ comme étant équivalents

si $f(x) = f(y)$ pour toute $f \in \mathfrak{A}$. Chaque classe d'équivalence X est fermée dans E, donc ouverte et dense dans son adhérence $\hat{X}$ dans $\hat{E}$. On peut considérer la frontière ∂X de X dans $\hat{X}$, l'ensemble $S|X$ des restrictions à X des fonctions de S et l'espace vectoriel topologique $C(S|X)_0 [X , \hat{X}]$, lequel contient comme sous-espace vectoriel l'ensemble $\mathfrak{W}|X$ formé des restrictions à X des éléments de $\mathfrak{W}$. On dira alors que l'adhérence de $\mathfrak{W}$ dans $CS_0(E , \hat{E})$ est <u>localisable</u> par rapport à $\mathfrak{A}$ (ou simplement que $\mathfrak{W}$ est localisable par rapport à $\mathfrak{A}$, pour simplifier) si, pour que f soit adhérente à $\mathfrak{W}$ dans $CS_0(E , \hat{E})$ il suffit (et il faut toujours) que sa restriction $f|X$ à X soit adhérente à $\mathfrak{W}|X$ dans $CS_0(X , \hat{X})$ quelle que soit la classe d'équivalence X suivant $E/\mathfrak{A}$. Le problème d'approximation de Bernstein, au sens strict, consiste alors à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait la propriété de localisabilité. Remarquons que, si $\mathfrak{A}$ est séparante sur E (c'est-à-dire si pour $x , y \in E$ et $x \neq y$, il existe $f \in \mathfrak{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$) et si $\mathfrak{W}$ est partout non nul sur E (c'est-à-dire si $x \in E$, il existe $w \in \mathfrak{W}$ telle que $w(x) \neq 0$), alors $\mathfrak{W}$ sera dense dans $CS_0(E , \hat{E})$ pourvu que $\mathfrak{W}$ soit localisable par rapport à $\mathfrak{A}$.

4. - On appellera problème d'approximation de Weierstrass le cas particulier où $E = \hat{E}$, donc $\partial E = \emptyset$. Le théorème classique de Weierstrass-Stone entraîne alors le résultat suivant (il lui est d'ailleurs équivalent).

THÉORÈME 1. - <u>On a toujours la propriété de localisabilité dans le cas du problème d'approximation de Weierstrass.</u>

Le cas borné du problème d'approximation de Bernstein est celui où toute fonction appartenant à $\mathfrak{A}$ est bornée aux points de ∂E, c'est-à-dire, pour tout $a \in \partial E$, il existe un voisinage V de a dans $\hat{E}$, tel que la fonction soit bornée dans $V \cap E$. C'est bien le cas si ∂E est vide, donc pour le problème d'approximation de Weierstrass, le théorème 1 étant alors un cas particulier du théorème ci-dessous.

THÉORÈME 2. - <u>On a toujours la propriété de localisabilité dans le cas borné du problème d'approximation de Bernstein.</u>

On notera l'importance que nous attacherons au cas borné, parce qu'une méthode possible de démonstration de résultats généraux de localisabilité consiste à se ramener à ce cas là. Il est à remarquer que, dans un sens, le cas borné est sans intérêt au point de vue de la théorie de l'approximation de Bernstein, laquelle à vrai dire ne commence qu'en dehors de ce cas : malgré celà, le cas borné est utile en tant que point de passage de certaines démonstrations.

5. - Enoncer maintenant un résultat général de réduction au problème classique. Pour celà, indiquons par A un ensemble de générateurs de $\mathfrak{A}$ en tant qu'algèbre topologique à unité : c'est donc un sous-ensemble de $\mathfrak{A}$ tel que la sous-algèbre unitaire de $\mathfrak{A}$ engendrée par A soit dense dans $\mathfrak{A}$ pour la topologie de $C(E)$. D'autre part, soit W un ensemble de générateurs de $\mathfrak{W}$ en tant que $\mathfrak{A}$-module topologique : c'est un sous-ensemble de $\mathfrak{W}$ tel que le $\mathfrak{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathfrak{W}$ pour la topologie de $CS_0(E, \hat{E})$.

THÉORÈME 3. - Supposons que, quels que soient $f \in A$, $w \in W$, $s \in S$ et $K \subset \hat{E}$ compact, il existe $b \in B_1$ (notation indiquée dans l'énoncé du problème d'approximation de Bernstein classique) telle que

$$s(x)\ |w(x)| \leqslant b[f(x)] \quad \text{si} \quad x \in K \cap E \quad .$$

Alors on a la propriété de localisabilité.

Une démonstration consiste à se ramener au théorème précédent. Une démonstration directe est aussi connue. Le théorème 3 nous permet d'énoncer des conditions générales de suffisance pour la propriété de localisabilité à partir de certains critères classiques sur la droite R. En particulier, on aura les résultats suivants.

THÉORÈME 4. - Supposons que, quels que soient $f \in A$, $w \in W$, $s \in S$ et $K \subset \hat{E}$ compact, il existe une fonction réelle continue b sur R strictement positive partout, telle que

$$b(t) = b(-t) \quad ,$$

$$\log 1/b(t) \text{ est convexe en } \log t \text{ pour } t > 0 \quad ,$$

$$\int^{+\infty} 1/t^2 . \log 1/b(t) . dt = +\infty \quad ,$$

pour laquelle on ait

$$s(x)\ |w(x)| \leqslant b[f(x)] \quad \text{si} \quad x \in K \cap E \quad .$$

Alors on a la propriété de localisabilité.

COROLLAIRE. - Si, quels que soient $f \in A$, $w \in W$, $s \in S$ et $K \subset \hat{E}$ compact, il existe des nombres réels $C > 0$, $c > 0$ tels que

$$s(x)\ |w(x)| \leqslant C.e^{-c|f(x)|} \quad \underline{\text{si}} \quad x \in K \cap E \quad ,$$

<u>on a la propriété de localisabilité.</u>

THÉORÈME 5. - <u>Supposons que, quels que soient</u> $f \in A$, $w \in W$, $s \in S$ <u>et</u> $K \subset \hat{E}$ <u>compact, on ait</u>

$$\sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt[m]{M_m}} = +\infty$$

<u>où on a posé</u>

$$M_m = \sup\{s(x)\ |f(x)^m\, w(x)|\ ;\ x \in K \cap E\} \qquad (m = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots) \qquad .$$

<u>Alors on a la propriété de localisabilité.</u>

Le corollaire ci-dessus est le critère de localisabilité le plus simple. Il résulte non seulement du théorème 4, mais aussi du théorème 5, parce qu'il correspond au fait que la série en question est divergente parce qu'elle majore la série harmonique $\sum 1/m = +\infty$.

6. - Comme on a dit, le théorème 5 résulte du théorème 3, mais on peut aussi démontrer directement le théorème 5 moyennant un théorème de Denjoy-Carleman vectoriel.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques réels localement convexes. Considérons une application indéfiniment différentiable $f : U \to F$, où $U \subset E$ est ouvert et connexe (pour la notion classique d'application vectorielle indéfiniment différentiable, voir, par exempoe, S. LANG [3], p. 6 ; en réalité, le théorème qu'on va énoncer reste valable pour d'autres versions connues et moins exigeantes de cette notion). Désignons par $D^m f(x)$ sa m-ième différentiable au point $x \in U$; c'est donc une application m-linéaire symétrique hypo-continue, définie sur la puissance cartésienne $E^m = E \times \dots \times E$ (m fois) à valeurs dans F , dont la valeur au point $(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) \in E^m$ sera notée par $D^m f(x\ ;\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m) \in F$. Nous dirons que f est quasi-analytique si, quel que soit $x \in U$, le sous-espace vectoriel fermé de F , engendré par tous les $D^m f(x\ ;\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m)$, pour $x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_m \in E$ et $m = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots$ arbitraires, est indépendant de x et coïncide avec le sous-espace vectoriel fermé de G engendré par $f(U)$. Ceci entraîne que, si $D^m f(x) = 0$ pour un certain $x \in U$ et tout $m = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots$, alors $f = 0$. Une m-semi-norme a_m sur E , pour $m = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots$, est une fonction réelle positive sur E^m telle que, pour chaque $i = 1\ ,\ \dots\ ,\ m$, la fonction partielle $x_i \to a_m(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_i\ ,\ \dots\ ,\ x_m)$ est une semi-norme au sens usuel, les vecteurs $x_j \in E$, pour $j = 1, \ldots, m$ et $j \neq i$, étant fixes (une 0-semi-norme est un nombre réel positif ; toute 1-semi-norme est une semi-norme usuelle). On supposera de plus a_m symétrique. On dira qu'une suite (a_m), $m = 0, 1, \ldots,$ où a_m est une m-semi-norme symétrique sur E, satisfait à la condition de Denjoy-Carleman si E est un sous-espace vectoriel engendré par les $x \in E$ tels que

$$\sum_{m>\sup(1,h)} \frac{1}{\sqrt[m]{a_m(x, \ldots, x, x_1, \ldots, x_h)}} = +\infty$$

où x est répété $m-h$ fois) quels que soient $h = 0, 1, \ldots$ et $x_1, \ldots, x_h \in E$. Remarquons que, si E est semi-normé et a_m définie par

$$a_m(x_1, \ldots, x_m) = M_m \|x_1\| \ldots \|x_m\| \quad ,$$

où $M_m \geqslant 0$ (comme c'est toujours le cas si $E = R$), la condition de Denjoy-Carleman est alors satisfaite si et seulement si

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{\sqrt[m]{M_m}} = +\infty \quad ,$$

auquel cas tout $x \in E$ satisfait à la condition de divergence ci-dessus. Ceci est à l'origine de la terminologie adoptée.

THÉORÈME 6. - Pour que f soit quasi-analytique, il suffit que, pour toute semi-norme continue b sur F, on puisse trouver une suite (a_m), $m = 0, 1, \ldots,$ où a_m est une m-semi-norme symétrique sur E, satisfaisant à la condition de Denjoy-Carleman, telle que

$$b[D^m f(x ; x_1, \ldots, x_m)] \leqslant a_m(x_1, \ldots, x_m)$$

quels que soient $x \in U$, $x_1, \ldots, x_m \in E$, $m = 0, 1, \ldots$

Ce théorème contient comme cas particulier la partie suffisante du théorème classique de Denjoy-Carleman. D'autre part, il est une conséquence, par récurrence finie, de la partie suffisante du théorème classique de Denjoy-Carleman. Dans la condition suffisante ci-dessus pour qu'une application indéfiniment différentiable d'une variable vectorielle à valeurs vectorielles soit quasi-analytique, on utilise donc des majorations des différentielles successives par des multi-semi-normes. C'est un point de vue plus général que celui consistant à insister sur des majorations par des multi-semi-normes du type

$$(x_1, \ldots, x_m) \to M_m\, a(x_1) \ldots a(x_m) \quad ,$$