

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

MICHEL HERVÉ

Quelques propriétés des applications holomorphes d'une boule à m dimensions dans elle-même

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. n° 3, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A3_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS HOLOMORPHES
 D'UNE BOULE À m DIMENSIONS DANS ELLE-MÊME

par Michel HERVÉ

Notations. - L'espace numérique C^m sera toujours envisagé comme espace vectoriel complexe ; les points de cet espace seront notés par des minuscules latines, et considérés, dans les calculs, comme des matrices à m lignes, une colonne ; a^* désignera la ligne transposée et conjuguée de la colonne a . Ainsi

$$b^* a = \sum_{j=1}^m \bar{b}_j a_j ,$$

où les a_j et b_j sont les coordonnées des points a et b ; enfin, on posera

$$\|a\|^2 = a^* a = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 .$$

Dans tout l'exposé, B_m désignera la boule-unité $\|x\| < 1$, où x est le point courant de C^m , et f une application holomorphe de B_m dans elle-même, autrement dit, un système de m fonctions holomorphes pour $\|x\| < 1$ et dont les modules ont des carrés de somme < 1 .

L'application f est un automorphisme de B_m si elle est de la forme

$$(0.1) \quad x' = A \Gamma_u \frac{x - u}{1 - u^* x} ,$$

où A est une matrice unitaire d'ordre m , $u \in B_m$, et

$$(0.2) \quad \Gamma_u = \frac{uu^*}{1 + \sqrt{1 - \|u\|^2}} + \sqrt{1 - \|u\|^2} I_m ,$$

I_m matrice-unité d'ordre m . Par suite :

a. les automorphismes de B_m qui laissent l'origine invariante sont les restrictions à B_m des applications linéaires unitaires de C^m sur lui-même ;

b. tout automorphisme f de B_m admet un prolongement continu \bar{f} à \bar{B}_m , qui applique biunivoquement la sphère ∂B_m sur elle-même ;

c. tout automorphisme de B_m est la restriction à B_m d'une application linéaire inversible de l'espace projectif P^m sur lui-même.

1. Le lemme de Schwarz.

Dans l'énoncé qui suit, la partie (a) est classique (cf. par exemple BOCHNER-MARTIN).

THÉOREME 1. -- Soit f une application holomorphe de la boule B_m dans elle-même, laissant l'origine invariante. Alors :

a. $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in B_m$;

b. l'ensemble des points $x \in B_m$, tels que $\|f(x)\| = \|x\|$, est l'intersection de B_m avec un sous-espace vectoriel V de C^m , dont la dimension p peut aller de 0 à m ;

c. la restriction de f à $B_m \cap V$ coïncide avec la restriction à $B_m \cap V$ d'un automorphisme de B_m ; en particulier, si V est de dimension m , f est un automorphisme de B_m .

Démonstration.

a. Etant donnés deux points a et $b \in C^m$, la fonction

$$(1.1) \quad \varphi_{a,b}(\zeta) = b^* f(\zeta a)$$

est holomorphe et de module $\leq \|b\|$ pour $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$, et nulle avec ζ ; d'après le lemme de Schwarz classique :

$$(1.2) \quad |\varphi_{a,b}(\zeta)| \leq \|a\| \|b\| |\zeta| \quad \text{pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|} ,$$

l'égalité dans (1.2) pour un ζ entraînant

$$(1.3) \quad \varphi_{a,b}(\zeta) \equiv e^{i\alpha} \|a\| \|b\| \zeta, \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

En réunissant (1.1) et (1.2), on a :

$$\|f(\zeta a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f(\zeta a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi_{a,b}(\zeta)| \leq \|\zeta a\| ,$$

pour tout $\zeta a \in B_m$.

b. On peut développer chaque coordonnée de $f(x)$ en série de polynômes homogènes, d'où une série normalement convergente sur tout compact de B_m :

$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$, où chaque coordonnée de $f_k(x)$ est un polynôme homogène et de degré k par rapport aux coordonnées de x ; les f_k sont donc des applications holomorphes de C^m dans C^m , et f_1 est linéaire. Etant donnés a et $b \in C^m$, pour $\|\zeta a\| < 1$:

$$\varphi_{a,b}(\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} b^* f_k(\zeta a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k b^* f_k(a) ,$$

d'où en particulier :

$$(1.4) \quad \varphi'_{a,b}(0) = b^* f_1(a) \quad .$$

En réunissant (1.2) et (1.4), on a :

$$(1.5) \quad \|f_1(a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f_1(a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi'_{a,b}(0)| \leq \|a\| \quad ,$$

pour tout $a \in C^m$.

Prenons maintenant $a \in B_m$, $a \neq 0$, et supposons $\|f(a)\| = \|a\|$. D'après (1.2) :

$$|\varphi_{a,f(a)}(\zeta)| \leq \|a\|^2 |\zeta| \quad \text{pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|} \quad ;$$

mais

$$\varphi_{a,f(a)}(1) = \|f(a)\|^2 = \|a\|^2 \quad ,$$

donc (1.3) est réalisé :

$$\varphi_{a,f(a)}(\zeta) \equiv \|a\|^2 \zeta \quad , \quad \varphi'_{a,f(a)}(0) = \|a\|^2 \quad .$$

Tenant compte de (1.4) et (1.5), on a $f(a)^* f_1(a) = \|f(a)\|^2$ avec $\|f_1(a)\| \leq \|f(a)\|$, donc $f_1(a) = f(a)$.

Prenons toujours $a \in B_m$, $a \neq 0$, et supposons au contraire $\|f_1(a)\| = \|a\|$. Si l'on pose

$$g(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) \quad ,$$

on a, pour $\|\zeta a\| < 1$:

$$\|f(\zeta a)\|^2 = \|f_1(\zeta a)\|^2 + \|g(\zeta a)\|^2 + 2 \operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \quad ,$$

alors que, d'après l'hypothèse et la partie (a) du théorème, $\|f(\zeta a)\| \leq \|f_1(\zeta a)\|$, donc $\operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \leq 0$. Or

$$f_1(\zeta a)^* g(\zeta a) = \zeta \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^k f_1(a)^* f_k(a) = |\zeta|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^{k-1} f_1(a)^* f_k(a) \quad ;$$

la dernière série converge pour $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$; sa somme est nulle pour $\zeta = 0$ et de partie réelle ≤ 0 partout ; elle est donc identiquement nulle, c'est-à-dire que $f_1(a)^* f_k(a) = 0$ pour tout $k \geq 2$. Alors $f_1(a)^* f(a) = \|f_1(a)\|^2$ avec $\|f(a)\| \leq \|f_1(a)\|$, donc $f(a) = f_1(a)$.

En réunissant les résultats des deux alinéas précédents, nous voyons que l'ensemble des points $x \in B_m$ tels que $\|f(x)\| = \|x\|$ est aussi celui des points $x \in B_m$ tels que $\|f_1(x)\| = \|x\|$, et que f et f_1 ont la même restriction à cet ensemble. Il reste à prouver que $V = \{x \in C^m \mid \|f_1(x)\| = \|x\|\}$ est un sous-espace vectoriel de C^m .

Soient donc a et $b \in V$; on a, pour $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\|\zeta a + b\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\zeta b^* a)$$

et

$$\|f_1(\zeta a + b)\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \quad .$$

Par suite, en tenant compte de (1.5) :

$$\operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \leq \operatorname{Re}(\zeta b^* a) \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{C} \quad ,$$

donc

$$f_1(b)^* f_1(a) = b^* a \quad \text{et} \quad \|f_1(\lambda a + \mu b)\| = \|\lambda a + \mu b\|$$

quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{C}$.

c. Supposant $p \geq 1$, on choisit une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_p\}$ de V , que l'on complète en une base orthonormée de \mathbb{C}^m , ainsi que le système orthonormé $\{f_1(e_1), \dots, f_1(e_p)\}$.

2. Conséquences du lemme de Schwarz.

On ne suppose plus que f laisse l'origine invariante.

A. L'ensemble des points de B_m invariants par f .

COROLLAIRE 1. — Etant donnée une application holomorphe f de la boule B_m dans elle-même, l'ensemble des points de B_m invariants par f est vide ou est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine de \mathbb{C}^m , dont la dimension peut aller de 0 à m .

B. Le lemme de Pick.

Soient x_0 et $x_1 \in B_m$:

$$\delta(x_0, x_1) = \left\| \left| \frac{x_1 - x_0}{1 - x_0^* x_1} \right| \right\|$$

est une distance dans B_m invariante par les automorphismes de B_m , et $\delta(0, x) = \|x\|$.

Pour énoncer le lemme de Pick, notons $d_{a,b}$ la droite complexe, ou variété linéaire affine de dimension 1 , passant par deux points donnés a et $b \in \mathbb{C}^m$, $a \neq b$, $d_{a,b}$ est le lieu, pour $\zeta \in \mathbb{C}$, du point $a + \zeta(b - a)$; l'ensemble des ζ pour lesquels $\|a + \zeta(b - a)\| < 1$ est vide ou est un disque ouvert de \mathbb{C} , dont le centre est le point qui rend $\|a + \zeta(b - a)\|$ minimum.

COROLLAIRE 2. - Etant donnée une application holomorphe f de la boule B_m dans elle-même :

a. $\delta[f(x_0), f(x_1)] \leq \delta(x_0, x_1)$ quels que soient x_0 et $x_1 \in B_m$;

b. si l'égalité se produit avec $x_0 \neq x_1$, alors la restriction de f au disque $B_m \cap d_{x_0, x_1}$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d_{f(x_0), f(x_1)}$, et

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient x et $x' \in B_m \cap d_{x_0, x_1}$;

c. réciproquement, si deux droites complexes d et d' , rencontrant B_m , sont telles que la restriction de f au disque $B_m \cap d$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d'$, alors

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient x et $x' \in B_m \cap d$;

d. étant donné $x_0 \in B_m$, l'ensemble des points $x \in B_m$, tels que

$$\delta[f(x_0), f(x)] = \delta(x_0, x),$$

est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine V de C^m , contenant x_0 , dont la dimension p peut aller de 0 à m ; la restriction de f à $B_m \cap V$ coïncide avec la restriction à $B_m \cap V$ d'un automorphisme de B_m ; en particulier, si $p = m$, f est un automorphisme de B_m .

Remarque. - Soient d_1 et d_2 deux droites complexes rencontrant B_m , ayant un point commun x_0 et un seul, telles que la distance δ soit conservée par les restrictions de f aux disques $B_m \cap d_1$ et $B_m \cap d_2$: d'après le corollaire 2 (d), si $x_0 \in B_m$, δ est encore conservée par la restriction de f à l'intersection de B_m avec la variété linéaire affine de dimension 2 qui contient d_1 et d_2 . Mais cette propriété ne subsiste plus si $x_0 \in \partial B_m$ ou $x_0 \in C^m - \bar{B}_m$.

3. La dérivée angulaire.

Etant donnée une application holomorphe f de B_m dans elle-même et deux points a et b de la sphère ∂B_m , posons

$$(3.1) \quad F(x) = F(x; f, a, b) = \frac{|1 - b^* f(x)|^2}{|1 - a^* x|^2} \frac{1 - \|x\|^2}{1 - \|f(x)\|^2}, \quad x \in B_m,$$

et définissons $\lambda = \lambda(f, a, b)$, $0 < \lambda \leq +\infty$, par

$$(3.2) \quad \lambda(f; a, b) = \sup_{x \in B_m} F(x; f, a, b).$$

THÉOREME 2. - Soit f une application holomorphe de la boule B_m dans elle-même, et soient a et b deux points de la sphère ∂B_m .

a. S'il existe une suite de points $y_n \in B_m$ tels que $y_n \rightarrow a$ et $f(y_n) \rightarrow b$, alors

$$\lambda \leq \liminf_n \frac{1 - \|f(y_n)\|}{1 - \|y_n\|} .$$

b. Si f est un automorphisme de B_m , et b l'image de a par le prolongement continu de f à \bar{B}_m , alors $\lambda < +\infty$ et $F(x) = \lambda$ pour tout $x \in B_m$.

c. Si $\lambda < +\infty$ et si $x_0 \in B_m$ est tel que $F(x_0) = \lambda$, alors $F(x) = \lambda$ pour tout $x \in B_m \cap d_{x_0, a}$, et la restriction de f au disque $B_m \cap d_{x_0, a}$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d_{f(x_0), b}$.

d. Si $\lambda < +\infty$, étant donné un cône

$$(K) \operatorname{Re}(1 - a^* x) \geq k \|a - x\|, \text{ où } k \in]0, 1[,$$

$$\frac{1 - \|f(x)\|}{1 - \|x\|}, \frac{1 - |b^* f(x)|}{1 - \|x\|}, \frac{1 - b^* f(x)}{1 - a^* x} \rightarrow \lambda \text{ quand } x \rightarrow a, x \in B_m \cap K .$$

Remarque. - Dans le cas classique $m = 1$, K est un angle saillant de sommet a dont la bissectrice intérieure passe par l'origine, et le dernier résultat signifie que la restriction de f à l'angle $B_1 \cap K$ possède une application affine tangente au point a , d'où le nom de dérivée angulaire; mais ceci n'est plus vrai si $m \geq 2$.

Soit, par exemple, $m = 2$, les coordonnées étant notées ξ et η , soit

$$\varphi(\xi) = \frac{2\xi + \sqrt{1 - \xi^2}}{2 + \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad |\xi| < 1 ,$$

la détermination adoptée pour $\sqrt{1 - \xi^2}$ valant 1 à l'origine, et soit enfin ψ une fonction holomorphe et non nulle sur le disque-unité B_1 , telle que $\log|\psi|$ soit la plus grande minorante harmonique, sur B_1 , de la fonction surharmonique $\log\sqrt{1 - |\varphi|^2}$. Prenons l'application holomorphe f de la boule B_2 dans elle-même définie par $\xi' = \varphi(\xi)$, $\eta' = \psi(\xi)$, $|\xi| < 1$, et les points a, b confondus avec le point de coordonnées $1, 0$: quand $t \rightarrow 1$, $t \in]-1, +1[$, on a $\varphi(t) \rightarrow 1$, $\psi(t) \rightarrow 0$, $1 - \varphi(t) \sim 1 - t$, $\log|\psi(t)| \sim \frac{3}{4} \log(1 - t)$, donc

$$ta \rightarrow a, \quad f(ta) \rightarrow a, \quad \frac{1 - \|f(ta)\|}{1 - \|ta\|} \rightarrow 1 ;$$

ainsi $\lambda(f, a, a) = 1$, mais la restriction de f à $B_2 \cap K$ n'a pas d'application affine tangente au point a , puisque $\frac{\psi(t)}{1 - t}$ n'est pas borné quand $t \rightarrow 1$, $t \in]-1, +1[$.

4. La suite des itérées d'une application holomorphe de B_m dans elle-même.

Soit f_n la n -ième itérée de l'application f , $f_1 = f$. De toute suite d'itérées de f on peut extraire une suite partielle uniformément convergente sur toute partie compacte de B_m ; la limite g de cette suite partielle peut être, ou bien une application holomorphe de B_m dans B_m , ou bien une application constante de B_m sur un point de la sphère ∂B_m . Si f est un automorphisme de B_m , il en est de même des f_n , et de g dans la première éventualité ci-dessus. (Cf. H. CARTAN (*).)

THÉORÈME 3. - Si f est un automorphisme de B_m , autre que l'identité : ou bien f laisse invariant un point au moins de B_m , alors la suite f_n ne converge pas, et les limites de suites partielles convergentes sont encore des automorphismes de B_m ; ou bien f ne laisse invariant aucun point de B_m , alors la suite f_n converge, uniformément sur tout compact de B_m , vers une application constante sur un point de la sphère ∂B_m , invariant par le prolongement continu de f à \bar{B}_m .

Démonstration. - Si le point $x_0 \in B_m$ est invariant par f , il l'est aussi par les limites d'itérées de f , qui sont donc des automorphismes de B_m ; si la suite partielle $f_{n_k} \rightarrow g$ ($n_k \rightarrow +\infty$ avec k), la suite $f_{n_k+1} \rightarrow f \circ g \neq g$, donc la suite f_n ne converge pas.

Si f ne laisse invariant aucun point de B_m , la propriété à établir est classique dans B_1 ; on va donc la supposer vraie dans B_{m-1} , et envisager successivement les cas suivants :

a. Le prolongement linéaire de f à l'espace projectif P^m ; défini par (0.1), laisse invariant dans son ensemble un hyperplan (ou variété linéaire affine de dimension $m-1$) H de C^m rencontrant B_m .

Alors, la restriction de f à $B_m \cap H$ applique biunivoquement $B_m \cap H$ sur lui-même; or, si l'on rapporte H à une base orthonormée, $B_m \cap H$ est une boule ouverte de C^{m-1} , pour laquelle la restriction de f à $B_m \cap H$ est un automorphisme sans point invariant. Par hypothèse, les restrictions des f_n à $B_m \cap H$ ont pour limite un point appartenant à $\partial B_m \cap H$; alors, il en est de même des f_n .

(*) CARTAN (Henri). - Sur les fonctions de plusieurs variables complexes, L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Z., t. 35, 1932, p. 760-773.

b. Le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant un point $x_1 \in \mathbb{C}B_m$ (qui peut être à l'infini).

x' et y' étant les images par (0.1) de deux points quelconques x et $y \in P^m$, on a

$$(4.1) \quad 1 - y'^* x' = \frac{1 - \|u\|^2}{(1 - u^* y)(1 - u^* x)} (1 - y^* x) \quad .$$

Alors, il résulte de l'hypothèse que le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan $x_1^* x = 1$ de C^m , qui rencontre B_m , et l'on est ramené au cas (a).

c. Le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant un point $a \in \partial B_m$.

D'après (4.1), il laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan $a^* x = 1$ de C^m , dont tous les points, sauf a , $\in \mathbb{C}B_m$; si l'on écarte le cas (b), a est le seul point invariant de l'hyperplan. D'autre part, le prolongement de f laisse invariante, dans son ensemble, au moins une droite complexe d issue de a dans l'hyperplan; si d est le lieu, pour $\zeta \in \mathbb{C}$, du point $a + \zeta b$, où $b \neq 0$, $a^* b = 0$, alors le prolongement de f transforme $a + \zeta b$ en $a + \zeta_1 b$, où ζ_1 est lié à ζ par une relation homographique, non dégénérée, ne laissant invariant que 0 , donc de la forme

$$(4.2) \quad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{\zeta} + h, \quad h = C_0 \neq 0 \quad .$$

En itérant (4.2) : le prolongement linéaire de f_n à P^m transforme $a + \zeta b$ en $a + \zeta_n b$, où

$$\frac{1}{\zeta_n} = \frac{1}{\zeta} + nh \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad ;$$

autrement dit : si $y \in d$ (y pouvant être à l'infini), les images y_n de y par les prolongements des f_n ont pour limite a .

Alors, étant donné $x \in B_m$, choisissons $y \in d$ tel que $y^* x = 1$: d'après (4.1), on a, de proche en proche, $y_n^* f_n(x) = 1$, et $y_n \rightarrow a$ entraîne $f_n(x) \rightarrow a$.

Comme toute application linéaire inversible de P^m sur lui-même laisse invariant un point au moins de P^m , tous les cas possibles ont été envisagés. Ainsi, lorsque f ne laisse invariant aucun point de B_m , la suite f_n a pour limite un point $a \in \partial B_m$; enfin, étant donné $x \in B_m$, $f_n(x) \rightarrow a$ et

$$f \circ f_n(x) = f_{n+1}(x) \rightarrow a \quad ,$$

donc a est invariant par le prolongement continu de f à \mathbb{E}_m .

THEOREME 4. - Si l'application f ne laisse invariant aucun point de B_m , la suite f_n converge, uniformément sur tout compact de B_m , vers une application constante sur un point de la sphère ∂B_m .

Démonstration.

a. Envisageons d'abord le cas où une suite d'itérées f_{n_k} , $n_k \rightarrow +\infty$ avec k , a une limite g appliquant B_m dans B_m : on peut supposer, en remplaçant au besoin la suite n_k par une suite partielle, que $n_{k+1} > n_k$ et $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \rightarrow h$.

Comme $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \circ f_{n_{2k}} = f_{n_{2k+1}}$, $g(B_m)$ est contenu dans l'ensemble analytique

$$B_q = \{x \in B_m \mid h(x) = x\} \quad ;$$

ainsi $B_q \neq \emptyset$, donc h est une application holomorphe de B_m dans B_m ; d'autre part,

$$f \circ h = \lim_k f_{1+n_{2k+1}-n_{2k}} = h \circ f \quad ,$$

donc :

$$(4.3) \quad x \in B_q \text{ entraîne } f(x) \in B_q \quad .$$

Or (n° 2, corollaire 1 appliqué à h), B_q est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine W , dont la dimension q peut aller de 0 à m ; si $q = 0$, B_0 est réduit à un point $x_0 \in B_m$, (4.3) signifie que x_0 est invariant par f . Si $q \geq 1$, $B_q = B_m \cap W$ est une boule à q dimensions; la restriction de f à B_q est, d'après (4.3), une application holomorphe de B_q dans B_q , dont les itérés de rangs $n_{2k+1} - n_{2k}$ ont pour limite l'application identique: cette restriction est donc (cf. l'article de H. CARTAN déjà cité au début du n° 4) un automorphisme de la boule B_q , qui (théorème 3) laisse invariant un point au moins de B_q .

b. Supposons maintenant que f ne laisse invariant aucun point de B_m : alors aucune limite d'itérées de f , dont les rangs tendent vers $+\infty$, ne peut être une application de B_m dans B_m , autrement dit $\|f_n(x)\| \rightarrow 1$ pour tout $x \in B_m$. On peut extraire de la suite des entiers une suite partielle $n_j \rightarrow +\infty$ telle que

$$\|f_{n_{j+1}}(0)\| \geq \|f_{n_j}(0)\| \quad ,$$

et de celle-ci une suite partielle $n_k \rightarrow +\infty$ telle que

$$\frac{1 - \|f_{n_{k+1}}(0)\|}{1 - \|f_{n_k}(0)\|} \leq 1$$

et que la suite f_{n_k} converge ; sa limite est une constante $a \in \partial B_m$, donc

$$f_{n_k}(0) \rightarrow a, \quad f \circ f_{n_k}(0) = f_{n_k} \circ f(0) \rightarrow a \quad \circ$$

Alors (théorème 2 (a)), $\lambda(f, a, a) \leq 1$, donc

$$\frac{|1 - a^* f(x)|^2}{1 - \|f(x)\|^2} \leq \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout } x \in B_m \quad ;$$

en itérant cette inégalité :

$$|1 - a^* f_n(x)|^2 \leq [1 - \|f_n(x)\|^2] \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout } x \in B_m \quad ,$$

et $\|f_n(x)\| \rightarrow 1$ entraîne $f_n(x) \rightarrow a$.
