

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JEAN-PIERRE KAHANE

Fonctions pseudo-périodiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. n° 3, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A3_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS PSEUDO-PÉRIODIQUES

par Jean-Pierre KAHANE

1. Historique.

PALEY et WIENER [4] appellent fonction pseudo-périodique (ps. p.) toute fonction f définie sur la droite, localement de carré sommeble, et telle que les combinaisons linéaires de ses translatées aient des normes équivalentes dans $L^2(I)$ et $L^2(J)$, dès que les intervalles I et J sont assez longs, soit $|I| > \lambda$, $|J| > \lambda$. La borne inférieure des λ , tels qu'il en soit ainsi, s'appelle la pseudo-période de f , et sera notée $\ell = \ell(f)$.

PALEY et WIENER démontrent les résultats suivants :

A. - Dire que f est ps. p., c'est dire que f est presque périodique à la Stepanoff (ps. p. Stepanoff) et de spectre régulier.

(On rappelle plus loin la définition d'une fonction p. p. Stepanoff. On dit qu'une suite Λ est régulière si la borne inférieure des distances de deux points distincts est positive ; on appelle "pas" de Λ cette borne inférieure).

B. - La pseudo-période ℓ ne dépend que du spectre Λ , et l'on a

$$(1) \quad \ell \leq 8\pi\delta^{-1}$$

δ désignant le pas de Λ .

Des inégalités d'INGHAM [1] permettent de raffiner (1) : on a

$$(2) \quad \ell \leq 2\pi\delta^{-1}$$

et la constante du second membre est maintenant la meilleure possible.

On peut cependant améliorer (2) ; on a exactement

$$(3) \quad \ell = 2\pi\Delta$$

$\Delta = \Delta(\Lambda)$ désignant la densité supérieure de répartition de Λ (J.-P. KAHANE [2]).

Δ peut être définie de l'une des manières équivalentes que voici :

a. Δ est la borne inférieure des densités des suites bien réparties contenant Λ . On dit que $\{\mu_n\}$ est bien répartie, et de densité D , si $\mu_n - \frac{n}{D} = o(1)$.

$$b. \quad \Delta = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_r \frac{n(r, r+t)}{t}$$

où $n(r, r+t)$ est le nombre de points de Λ dans $(r, r+t[$.

$$c. \quad \Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \pm \infty} \frac{n(r, r+t)}{t} .$$

La démonstration de (3) utilise des techniques de fonctions entières d'une variable, et l'interprétation suivante de ℓ :

ℓ est la borne inférieure des τ tels que toute suite de carré sommable définie sur Λ soit la restriction à Λ d'au moins une fonction entière Φ de type exponentiel $\leq \tau$, et de carré sommable sur la droite réelle.

2. Essai d'une théorie dans \mathbb{R}^p .

Soit $E^2 = E^2(\mathbb{R}^p)$ l'espace des fonctions localement de carré sommable dans \mathbb{R}^p ; c'est un espace de Fréchet, avec les semi-normes

$$\|f_t\|_D = \left(\int_D |f(x-t)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (t \in \mathbb{R}^p)$$

D étant un domaine (= fermeture d'un ouvert borné) fixé.

On dira que f est E^2 -bornée si ces semi-normes sont bornées, et on pose

$$\|f\|_{BE^2} = \sup_{t \in \mathbb{R}^p} \|f_t\|_D .$$

Avec cette norme, l'ensemble BE^2 des fonctions E^2 -bornées est un espace de Banach.

Pour tout sous-espace fermé de E^2 , contenu dans BE^2 , il existe un domaine G tel que les normes de ses éléments dans BE^2 et dans $L^2(G)$ sont équivalentes.

Rappelons qu'une fonction p. p. Stepanoff est un élément de BE^2 tel que l'ensemble de ses translatés y soit relativement compact ; c'est aussi bien une limite dans BE^2 de polynômes trigonométriques ; le spectre de f est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tels que $e^{i\lambda x}$ soit approchable dans BE^2 par des combinaisons linéaires de translatés de f .

On appelle famille pseudo-périodique un sous-espace fermé F de E^2 , contenu dans BE^2 et invariant par translation. Un domaine G tel que $\|f\|_G \sim \|f\|_{BE^2}$ sur

F s'appellera un domaine associé à F . Un élément d'une famille ps. p. s'appellera une fonction ps. p. On en déduit immédiatement qu'une fonction ps. p. est E^2 -moyenne-périodique. le résultat essentiel est le suivant (c'est une variante du

théorème A de Paley-Wiener).

Si Λ est une suite régulière dans \mathbb{R}^p , les exponentielles $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ engendrent dans E^2 une famille ps. p. F_Λ et constituent une base de F_Λ . Inversement, toute famille ps. p. F est engendrée dans E^2 par les exponentielles $e^{i\lambda x}$ qu'elle contient, et son spectre $\Lambda_F = \{\lambda | e^{i\lambda x} \in F\}$ est régulier.

Désormais, Λ sera une suite régulière, et on appellera domaine associé à Λ tout domaine associé à F_Λ ; c'est un domaine G tel que, pour tous les polynômes trigonométriques

$$s(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$$

il y a équivalence des normes $\|s\|_G$ et $(\sum |a(\lambda)|^2)^{1/2}$.

3. Étude des domaines associés à Λ .

Exprimons cette définition en faisant intervenir les espaces de Banach suivants :

F_Λ , normé par $\|f\|_{BE^2}$;

$L_\Lambda^2(G)$: sous-espace fermé de $L^2(G)$ engendré par $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$;

ℓ_Λ^2 : espace des suites $\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de carré sommable ;

$\text{Exp}^2(G)$: espace des transformées de Fourier des fonctions appartenant à $L^2(G)$ (prolongé par 0 hors de G).

Alors il revient au même de dire que

- G est un domaine associé à Λ ;
- F_Λ et $L_\Lambda^2(G)$ sont isomorphes dans l'application canonique ;
- $L_\Lambda^2(G)$ et ℓ_Λ^2 sont isomorphes dans l'application $f \rightarrow \{a_f(\lambda)\}$;
- L'application $\Phi \rightarrow \{\Phi(\lambda)\}$ est un homomorphisme de $\text{Exp}^2 G$ sur ℓ_Λ^2 ;
- Toute $f \in L_\Lambda^2(G)$ est prolongeable de manière unique sur \mathbb{R}^p en une fonction appartenant à F_Λ ;
- $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ forme une base de $L_\Lambda^2(G)$ (espace de Banach) et, pour toute $f \in L_\Lambda^2(G)$, les composantes de f suivant cette base forment une suite de carré sommable ;

g. A toute suite $\{b(\lambda)\} \in \ell^2_\Lambda$ correspond au moins une $\phi \in \text{Exp}^2 G$ telle que $\Phi(\lambda) = b(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$).

EXEMPLE. - $\Lambda = \{\text{sommets d'un réseau}\}$, $G = \text{maille du réseau conjugué}$.

Il est intéressant d'étudier géométriquement G en fonction de Λ . Voici quelques questions naturelles, et des éléments de réponse.

1° Convenons de dire que deux suites sont α -voisines, s'il existe entre elles une correspondance biunivoque $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ telle que $|\lambda' - \lambda| < \alpha$ pour tout λ . Deux suites (régulières) α -voisines ont-elles mêmes domaines associés ?

RÉPONSE : Non (cf. exemple ci-dessus). Mais si G est un domaine associé à Λ , il existe un $\alpha > 0$ tel que G reste associé à toute suite α -voisine de Λ .

2° Soit G_j un domaine associé à Λ_j ($j = 1, 2$); on suppose $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ régulière. Peut-on déterminer simplement des domaines G associés à Λ ?

RÉPONSE : Il suffit que l'intérieur de G contienne $\overline{G_1 + G_2}$.

3° A quelle condition tout domaine est-il associé à Λ ?

RÉPONSE : Soit $N(r)$ le nombre maximum de points de Λ dans une boule de rayon r . Il suffit que $N(r) = \sigma(r)$. Il ne suffit pas que $N(r) = \mathcal{O}(r)$ (évident). La condition est nécessaire pour $p = 1$, mais non pour $p > 1$.

4° Appelons épaisseur de G dans la direction D la longueur du plus petit segment contenant la projection orthogonale de G sur une droite parallèle à D . Peut-on relier cette épaisseur à une densité de Λ convenablement définie ?

RÉPONSE : L'épaisseur minimum dans la direction G est $2\pi\Delta_\Lambda(\Lambda)$, où

$$\Delta_D(\Lambda) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{N_D(\ell, \eta)}{\ell}$$

$N_D(\ell, \eta)$ étant la maximum, pour tous les segments S de longueur ℓ parallèles à D , du nombre de points de Λ qui sont à une distance de S inférieure à η .

On peut appliquer cette formule à l'exemple ci-dessus.

5° Existe-t-il une interprétation, relative aux domaines associés, de la densité supérieure de répartition en volume, définie par analogie avec la définition (a) donnée sur la droite (voir historique) ?

RÉPONSE inconnue : Il existe des suites "rares", dans ce sens que leur densité supérieure de répartition en volume est nulle, et telles que tout domaine convexe associé, symétrique par rapport à O , contient une boule arbitraire donnée.

6° Peut-on interpréter, par une notion de lacunarité convenable, le fait que Λ admet des domaines associés de volume arbitrairement petit ?

RÉPONSE inconnue.

4. Relation avec un problème de Mandelbrojt.

MANDELBROJT ([3]) a posé en 1935 sur les séries de Fourier un problème que nous formulerons ainsi :

La suite régulière Λ étant donnée, déterminer des domaines G et des propriétés P telles que, si une fonction ps. p. $\in F_\Lambda$ satisfait P sur un voisinage de G (= un ouvert contenant G), elle satisfait P partout. Nous dirons alors que P est une bonne propriété relativement à Λ et G .

Si G est associé à Λ , l'appartenance à C^∞ , l'analyticité, sont de bonnes propriétés.

Il en est de même pour l'appartenance locale à \mathfrak{L}^1 (c'est-à-dire le fait d'être localement représentable comme transformée de Fourier d'une fonction de L^1). Réciproquement, si cette propriété est bonne relativement à Λ et G , tout voisinage de G contient un domaine associé à Λ .

On peut remplacer dans cet énoncé \mathfrak{L}^1 par $\mathfrak{L}^{\alpha,r}$, $L^{\alpha,r}$ représentant l'ensemble des fonctions de puissance α -ième sommable par rapport à un poids $(1 + |x|)^r$, à condition que $\mathfrak{L}^{\alpha,r} \subset E^2$. L'étude des espaces $\mathfrak{L}^{\alpha,r}$ n'est pas sans intérêt en elle-même. Ce sont les succédanés naturels de E^2 pour la théorie de la pseudo-périodicité.

5. Séries de Fourier lacunaires.

On vient de voir que le comportement d'une fonction appartenant à F_Λ est déterminé, à divers égards, par son comportement au voisinage d'un domaine associé à Λ . Si Λ est assez lacunaire, on doit s'attendre à ce que son comportement sur certains compacts sans intérieur, convenablement associés à Λ , permette de connaître son comportement dans tout l'espace. Il en est bien ainsi, comme le montrera l'exposé n° 5.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] INGHAM (A. E.). - Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, Math. Z., t. 41, 1936, p. 367-379.
 - [2] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 293-314.
 - [3] MANDELBRÓJT (Szolem). - Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. - Paris, Gauthier-Villars, 1935 (Collection de Monographies sur la théorie des fonctions).
 - [4] PALEY (R.) and WIENER (N.). - Fourier transforms in the complex domain. - New York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc., Coll. Publ., 19).
-