

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JEAN-PIERRE KAHANE

**Fonctions qui opèrent dans les algèbres de transformées de Fourier
de suites, de fonctions ou de mesures sommables**

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 5, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A2_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS QUI OPÈRENT DANS LES ALGÈBRES DE TRANSFORMÉES DE FOURIER
DE SUITES, DE FONCTIONS OU DE MESURES SOMMABLES

par Jean-Pierre KAHANE

1. Définitions et notations.

On désigne :

- par T , R , Z , le cercle, la droite et la suite des entiers,
- par $A(T)$ l'algèbre des fonctions (à valeurs complexes) définies sur T , dont la série de Fourier est absolument convergente,
- par $A(Z)$ l'algèbre des coefficients de Fourier (complexes) des fonctions sommables sur T ,
- par $A(R)$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions sommables sur R
- par $B(Z)$ l'algèbre des suites de coefficients de Fourier-Stieltjes des mesures sur T ,
- par $B(R)$ l'algèbre des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures bornées ("sommables") sur R ,
- par $A_r(T)$ etc., $B_r(Z)$ etc. l'ensemble des éléments réels de $A(T)$ etc., $B(Z)$ etc.

Les algèbres ci-dessus sont des algèbres normées complètes, quand on prend pour normes, respectivement, la somme des modules des coefficients de Fourier, la norme L^1 de la cotransformée de Fourier, ou la masse totale de la cotransformée de Fourier.

On dit qu'une fonction F (à valeur complexe), définie sur une partie D du plan complexe, "opère" dans $A(T)$ etc. si, pour chaque $f \in A(T)$ etc., à valeur dans D , $F(f) \in A(T)$.

2. Conditions suffisantes pour que F opère.

Cas de $A(T)$. - Il suffit que F soit analytique sur D (théorème de Wiener-Lévy [8]). Il suffit même que $F(x + iy)$ soit analytique en x et y sur D (ŠILOV, ARENS-CALDERON, WOELBROECK [1]).

Cas de $A(R)$. - Mêmes conditions, avec $0 \in D$ et $F(0) = 0$.

Cas de $A(Z)$. - Il suffit que $F(0) = 0$ et que F soit analytique en 0 (très facile).

Cas de $B(\mathbb{R})$ et $B(\mathbb{Z})$..- Il suffit que $F(x + iy)$ soit une fonction entière en x et y (immédiat).

Dans [8], P. LÉVY pose le problème de caractériser les fonctions qui opèrent. On a tenté d'abord d'améliorer les résultats ci-dessus, quitte à ne faire opérer F que sur des sous-classes de $A(T)$ etc. [3], [9]). Puis on a tenté d'obtenir des conditions nécessaires.

3. Conditions nécessaires connues avant juillet 1958.

Dans [3], [4], [10], [11] on prouve notamment que $F(x) = |x|$ n'opère pas dans $A(T)$, $A(\mathbb{R})$, $A(\mathbb{Z})$, et que toute fonction F opérant dans $A(\mathbb{Z})$ est lipschitzienne au voisinage de l'origine.

Dans [5] on prouve que la condition d'analyticité ne peut être remplacée, dans le théorème de Wiener-Lévy, par la condition d'appartenance à une classe non-analytique de fonctions indéfiniment dérivables. On prouve aussi la proposition :

(P) : Si F est une fonction périodique de variable réelle, et si pour chaque $f \in A_r(T)$, les normes $\|F(f + t)\|$ sont uniformément bornées, F est analytique.

Cette proposition, un peu modifiée, a été utile pour la solution définitive du problème de Paul LÉVY.

4. Caractérisation des F opérant dans $A(T)$.

Suivant une idée de HELSON (théorème de Baire), KATZNELSON a montré [7] que toute F définie sur un intervalle ouvert réel I , et opérant dans $A(T)$, est analytique sur I . Plus généralement [2], toute F définie sur un compact convexe D du plan, et opérant dans $A(T)$, est analytique sur D . Nous donnons la démonstration du théorème de Katznelson sous la forme simplifiée, et généralisable à $F(x + iy)$, que lui a donnée RUDIN.

On s'appuie sur la proposition, que nous vérifierons ensuite,

(P') : Si G est une fonction 2π -périodique de variable réelle, et que, pour $\|f\| \leq 2\pi$, $\|G(f)\|$ est uniformément borné, G est analytique.

On peut supposer que I contient 0, et que $F(0) = 0$.

Soit A' l'idéal des fonctions $\in A_r(T)$, nulles en 0. F définit un opérateur $f \rightarrow F(f)$ de A' dans A' , qui est de la première classe de Baire ; en effet,

$$F(f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{int}$$

l'opérateur $f \rightarrow a(f)$ étant visiblement (par formule de Fourier) continu. Donc l'opérateur F admet un point de continuité dans A' , soit f_0 ; il est borné dans une boule $\mathcal{B}(f_0, \xi)$ de A' . Il existe une $f_1 \in \mathcal{B}(f_0, \xi/2)$ qui s'annule sur un intervalle J (assez voisin de 0) ne contenant pas 0. Soit $A_r(J)$ l'idéal de $A_r(T)$ constitué des fonctions à support dans J ; si $\varphi \in A_r(J)$, $F(\varphi) = F(f_1 + \varphi) - F(f_1)$, donc F est un opérateur borné dans la boule $\mathcal{B}(0, \xi/2)$ de $A_r(J)$. On en déduit que F est borné dans une boule $\mathcal{B}(0, \xi')$ de $A_r(T)$; en posant $F(\frac{\xi}{10} \sin x) = G(x)$ et en appliquant (P') on voit que F est analytique en 0.

On verra plus loin la démonstration de (P').

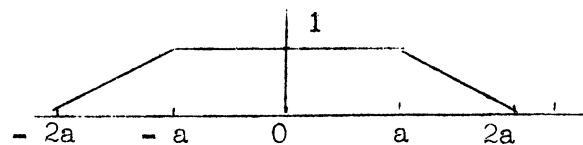
5. Caractérisation des F opérant dans $A(Z)$.

Dans [2] est donnée une nouvelle démonstration du théorème précédent évitant le recours au théorème de Baire et s'appliquant à $A(Z)$. On montre que toute F définie sur l'axe réel au voisinage de 0 et opérant dans $A(Z)$ est analytique en 0 (évidemment $F(0) = 0$). Plus généralement, toute F définie au voisinage de 0 dans un angle $\theta_1 \leq \arg(x + iy) \leq \theta_2$ et opérant dans $A(Z)$ est analytique en x et y au voisinage de 0.

On s'appuie sur la proposition suivante, où $C_r(Z)$ désigne l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à $A_r(Z)$, c'est-à-dire $f \in C_r(Z) \Leftrightarrow f = f_1 + t$ avec $f_1 \in A_r(Z)$, t constante réelle ($C_r(Z)$ est sous-algèbre de $B_r(Z)$):

(P'') : Si G est une fonction périodique de variable réelle telle que, pour $f \in C_r(Z)$ et $\|f\| \leq 1$, on a $G(f) \in C_r(Z)$ et $\|G(f)\|$ uniformément borné, G est analytique.

Quitte à poser $F(\frac{\xi}{10} \sin x) = G(x)$, il suffit de montrer que pour un $\xi > 0$, l'opérateur $f \rightarrow F(f)$ est borné dans la boule $\mathcal{B}(0, \xi)$ de $C_r(Z)$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $f_j \in C_r(Z)$, telle que $\|f_j\| < 2^{-j}$ et $\|F(f_j)\| > 1$. Désignons par V_a (a : entier) la suite linéaire sur les intervalles $(-\infty, -2a)$, $(-2a, -a)$, $(-a, a)$, $(a, 2a)$, $(2a, \infty)$, égale à 0 en $2a$ et $-2a$, et à 1 en a et $-a$; on a les propriétés suivantes (de LA VALIÉE POUSSIN)



1° pour tout $f \in B(Z)$, $\lim_{a \rightarrow \infty} \|V_a f\| \geq \|f\|$ d'après HELLY)

2° pour tout $f \in B(Z)$, $\|V_a f\| \leq 3 \|f\|$ (car $\|V_a\| \leq 3$).

D'après 1°, on peut choisir a_j de façon que $\|V_{a_j} F(f_j)\| > \frac{1}{2}$. Or

$$V_{a_j} F(f_j) = V_{a_j} F(V_{2a_j} f_j)$$

D'après 2° , $\|V_{2a_j} f_j\| \leq 3.2^{-j}$ et $\|F(V_{2a_j} f_j)\| > \frac{1}{6}$. On translate $V_{2a_j} f_j$ sur un intervalle $[\alpha_j, \beta_j]$ tel que $\alpha_{j+1} > 2\beta_j$; soit φ_j la suite obtenue : on a encore $\|\varphi_j\| \leq 3.2^{-j}$ et $\|F(\varphi_j)\| > \frac{1}{6}$, $\varphi_j \in A_r(Z)$. La considération de $\varphi = \sum_1^\infty \varphi_j$ et de $F(\varphi) = \sum_1^\infty F(\varphi_j)$ aboutit à une contradiction et le résultat est démontré, sous réserve de la vérification de (P").

5. Caractérisation des F opérant dans B(Z).

Dans [2] on montre que toute F définie sur la droite réelle et opérant dans B(Z) est une fonction entière. De même, toute F définie dans le plan et opérant dans B(Z) est une fonction entière de x et de y.

La démonstration s'appuie sur la proposition

(P'') : Si G est périodique, et que l'opérateur $f \rightarrow G(f)$ de $B_r(Z)$ dans B(Z) soit borné sur toute boule $\|f\| \leq r$, G est entière.

Montrons que si F opère dans $B_r(Z)$ l'opérateur $f \rightarrow F(f)$ est borné sur toute boule de $B_r(Z)$. Sinon en effet, il existe un r et des $f_j \in B_r(Z)$ tels que $\|f_j\| < r$ et $\|F(f_j)\| \rightarrow \infty$. Quitte à remplacer f_j par $V_{2a_j} f_j$ comme dans le cas de A(Z), on peut supposer f_j à support fini, c'est-à-dire

$$\hat{f}_j(t) = \sum_{-N_j}^{N_j} a_n e^{int}. \text{ On pose}$$

$$\hat{\varphi}_j(t) = \sum_{-N_j}^{N_j} a_n e^{i(m_j n + \lambda_j)t}$$

et on construira les m_j et λ_j de façon qu'existe une suite $\varphi \in B_r(Z)$ égale à φ_j sur la suite d'indices $S_j = \{nm_j + \lambda_j\}$, $(-2N_j \leq n \leq 2N_j)$; alors la restriction à S_j de $F(\varphi)$ est $F(\varphi_j)$, et le fait que $\|F(\varphi_j)\| \rightarrow \infty$ entraîne $F(\varphi) \notin B(Z)$.

Pour construire les m_j et les λ_j , on raisonne par dualité : on les choisit tels que, pour tous les polynômes $\hat{Q} = \sum \hat{Q}_j$ (Q_j à support dans S_j), on ait équivalence des normes $\|Q\|_\infty$ et $\sum \|Q_j\|_\infty$. Cela est possible de façon élémentaire. Alors les φ_j définissent une forme linéaire sur l'espace des Q (à cause de la 2e norme) prolongeable en une forme linéaire sur l'espace

des fonctions continues (à cause de la 1^{re}), ce qui définit φ . En posant $F(r \sin x) = G(x)$, on voit d'après (P'') (qui reste à démontrer) que F est une fonction entière.

Comme corollaire, on a un résultat de SCHREIDER : quel que soit z complexe, il existe un caractère de l'algèbre $B(Z)$ qui applique au moins un élément de $B_r(Z)$ en z (sinon, $F(x) = (x - z)^{-1}$ opèrerait).

On en déduit facilement que, si $F(x + iy)$, définie dans le plan, opère dans l'algèbre de Gelfand de $B(Z)$, F est une fonction entière de $x + iy$.

6. Démonstration de (P')

On se borne à la démonstration de (P') (pour celles de (P'') et (P'''), voir [2]).

Si G est 2π -périodique, on a $G(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$, $\sum |\gamma_n| < \infty$, il suffit de montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_n < e^{-\varepsilon n}$ pour tout n .

Pour tout t , on a

$$\gamma_n e^{inf(t)} = \int G(f(t) + x) e^{inx} dx$$

et si $\|G(f + x)\| < B$, pour tout x , il est aisé de voir que

$$|\gamma_n| \|e^{inf}\| < B.$$

Il suffit de montrer que $\sup_{\|f\| \leq r} \|e^{if}\| = e^r$ (on a évidemment $\leq$).

On utilise le lemme suivant : quand $\lambda \rightarrow \infty$ par valeurs entières,

$$\|h(t) g(\lambda t)\| \rightarrow \|h\| \|g\|.$$

On peut ainsi, quel que soit N donné, construire $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de façon que, si $f(x) = \frac{r}{N}(\cos \lambda_1 x + \dots + \cos \lambda_N x)$, on ait $\|e^{if}\|$ arbitrairement

voisin de $\|e^{i \frac{r}{N} \cos x}\|^N$. Or, pour $\alpha > 0$,

$$\|e^{i\alpha \cos x}\| = \|1 + i\alpha + \dots\| > 1 + \alpha - \|\dots\| > 1 + \alpha - O(\alpha)$$

($\alpha \rightarrow 0$) donc $\|e^{i \frac{r}{N} \cos x}\|^N$ est, par choix de N , arbitrairement voisin de e^r .

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARENS (R.) and CALDERON (A.P.) - Analytic functions of several Banach algebra elements, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 204-216.

- [2] HELSON (H.) et KAHANE (J.P.) . - Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 626-628.
 - [3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 36-37.
 - [4] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur un problème de Littlewood, Kon. nederl. Akad. Wetensch., Proc. , Series A : Math. Sc. , t. 60, 1957, p. 268-271.
 - [5] KAHANE (Jean-Pierre) . - Sur un théorème de Wiener-Lévy, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 1949-1951.
 - [6] KAHANE (J.-P) et RUDIN (W.). - Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 773-775.
 - [7] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 404-406.
 - [8] LÉVY (Paul) . - Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Comp. Math., t. 1, 1934-35, p. 1-14.
 - [9] MARCINKIEWICZ (J.) . - Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Math. Cluj, t. 16, 1940, p. 66-73.
 - [10] RUIJIN (Walter). - Non-analytic functions of absolutely convergent Fourier series, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 41, 1955, p. 238-240.
 - [11] RUDIN (Walter). - Transformation des coefficients de Fourier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, p. 638-640.
-