GUIDO STAMPACCHIA

Équations elliptiques à données discontinues

Séminaire Schwartz, tome 5 (1960-1961), exp. nº 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A4_0>

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES À DONNÉES DISCONTINUES

par Guido STAMPACCHIA

Il est bien connu que la régularité des solutions d'un problème aux limites pour une équation du type elliptique suppose que les coefficients et aussi les autres données du problème soient suffisamment réguliers.

C'est seulement depuis les travaux de NASH [4], DE GIORGI [1], MOSER [3] qu'on a quelques résultats de régularité locale pour les solutions des équations d'ordre 2 à coefficients mesurables et bornés.

Je me suis posé le problème d'obtenir quelques résultats de régularité pour les solutions de problèmes aux limites relatifs à une équation elliptique d'ordre 2 à données discontinues. Des problèmes du même genre ont été étudiés par C. B. MORREY [2].

Je vais exposer d'abord les propriétés de sommabilité des solutions de tels problèmes en donnant des théorèmes valables sous des hypothèses concernant les coefficients d'ordre inférieur à 2 moins strictes que celles que j'ai utilisées dans des travaux antérieurs ([5], [6]).

Je donnerai ensuite des énoncés de théorèmes de continuité höldérienne en renvoyant à [7] pour les démonstrations. Il serait très utile (en vue de l'étude des problèmes non linéaires) de généraliser ces théorèmes, comme je l'ai fait pour les premiers résultats ici démontrés.

I

NOTATIONS. - Soient Ω un ouvert borné de R^m, $\partial\Omega$ sa frontière et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ l'adhérence de Ω. Soit $H^1(\Omega)$ l'espace complété de $C^1(\overline{\Omega})$ (fonctions une fois continûment dérivables sur $\overline{\Omega}$) par rapport à la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}$$

et soit $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^1(\overline{\Omega})$ (fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ nulles sur $\partial\Omega$) dans $H^1(\Omega)$.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$ contenant $H_0^1(\Omega)$.

HYPOTHÈSE A. - Il existe α vérifiant $\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2}$, et $\beta>0$ tels que, $\forall$ $u\in V$, l'on ait :

$$\|u\|_{L^\alpha(\Omega)}\leqslant\beta(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^m\|D_i u\|_{L^2(\Omega)}) \quad .$$

REMARQUE. - Si $V=H_0^1(\Omega)$, l'hypothèse A est vérifiée avec $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m}$ d'après SOBOLEV.

On va considérer maintenant les fonctions suivantes : $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$ $(i\,,\,j=1\,,2\,,\,\ldots\,,\,m)$ telles que l'on ait

$$(1)\qquad \mu\sum_{i=1}^m\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j}a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\leqslant M\sum_{i=1}^m\xi_i^2 \qquad (\mu>0\,,\ x\in\Omega\,,\ \xi_i\in R)$$

$$b_i\in L^b(\Omega)\quad\text{où}\quad\frac{1}{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}$$

$$d_i\in L^d(\Omega)\quad\text{où}\quad\frac{1}{d}<\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}$$

$$c\in L^c(\Omega)\quad\text{où}\quad\frac{1}{c}<1-\frac{2}{\alpha}$$

$$f_i\in L^r(\Omega)\quad\text{où}\quad r\geqslant 2$$

$$f_0\in L^{r_0}(\Omega)\quad\text{où}\quad\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha} \quad .$$

Si $V=H_0^1(\Omega)$, on a :

$$b=m\,,\quad d>m\,,\quad c>\frac{m}{2}\,,\quad \frac{1}{r_0}=\frac{1}{r}+\frac{1}{m} \quad .$$

On pose, pour $u\,,\,v\in H^1(\Omega)$:

$$a(u\,,\,v)=\int_\Omega\Big[\sum_{i,j}a_{ij}(x)\,D_i u\,D_j v+\sum_{i=1}^m b_i(x)\,D_i u\,v+\sum d_i(x)\,u\,D_i v + c(x)\,u\,v\Big]\,dx$$

$$\langle f , v\rangle = \int_\Omega [f_0 v + \sum_{i=1}^{m} f_i D_i v] \, dx \quad .$$

Si $u(x) \in V$ et vérifie la relation :

$$a(u , v) + \lambda(u , v)_{L^2(\Omega)} = \langle f , v\rangle \quad \text{quel que soit } v \in V \quad ,$$

on écrira

$$u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega , V) \quad .$$

Les solutions (au sens de la théorie des distributions) des problèmes aux limites elliptiques d'ordre 2 sont des fonctions $u(x) \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega , V)$. Par exemple : problème de Dirichlet avec $V = H_0^1(\Omega)$; problème de Neumann avec $V = H^1(\Omega)$; problème mêlé de Dirichlet-Neumann avec V, sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur un sous-ensemble $\partial_1 \Omega$ de $\partial\Omega$ s'annule.

II

Démontrons maintenant que si (1) et l'hypothèse A sont vérifiés, on a :

<u>Si</u> λ <u>est suffisamment grand, il existe</u> $\overline{\mu}$, $\overline{M} > 0$ <u>tels que</u> $\forall \ v \in V$:

$$\overline{\mu}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(v , v) + \lambda(v , v)_{L^2(\Omega)} \leq \overline{M}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad .$$

a. Si $b_i = d_i = c = 0$ c'est évident (sans l'hypothèse A au demeurant).

b. Si b_i, d_i, c sont des fonctions bornées, c'est facile : toujours sans l'hypothèse A, utiliser l'inégalité

$$2\,ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon \quad .$$

c. Soit $b_i \in L^b(\Omega)$; alors, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut choisir $k > 0$ tel que :

$$\int_{\{x ; b_i(x) > k\}} |b_i(x) - k|^b \, dx \leq \varepsilon^b \ , \quad \int_{\{x ; b_i(x) < -k\}} |b_i(x) + k|^b \, dx \leq \varepsilon^b \quad .$$

Alors, puisque :

$$b_i(x) = \{b_i(x)\}_{-k}^{k} + [b_i(x) - \{b_i(x)\}_{-k}^{k}]$$

où $\{b_i(x)\}_{-k}^{k}$ désigne la fonction que l'on obtient en tronquant $b_i(x)$ aux niveaux k et $-k$, on peut décomposer le terme

$$\int_\Omega b_i(x)\, D_i v\, v\, dx \quad \text{en} \quad \int_\Omega \{b_i(x)\}_{-k}^{k} D_i v\, v\, dx$$

et

$$\int_\Omega [b_i(x) - \{b_i(x)\}_{-k}^{k}]\, D_i\, v\, v\, dx$$

Pour le premier terme, on est ramené à (b). Le second terme, d'après l'inégalité de Hölder et l'hypothèse A, est majoré par :

$$\|b_i - \{b_i\}_{-k}^{k}\|_{L^b(\Omega)} (\|D_i v\|_{L^2(\Omega)})(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|D_i v\|_{L^2(\Omega)}) \leq 3\varepsilon\|D_i v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Les autres termes se traitent de façon anaologue.

REMARQUE. - les constantes trouvées dépendent de b_i et pas seulement de la norme $\|b_i\|_{L^b}$.

III

La théorie des problèmes aux limites nous permet maintenant d'affirmer ceci :

<u>Il existe</u> $\bar{\lambda} > 0$ <u>tel que, si</u> $\lambda > \bar{\lambda}$, <u>si</u> f <u>est dans le dual</u> $[H^1(\Omega)]'$ <u>de</u> $H^1(\Omega)$, <u>il existe</u> $u \in V$ <u>unique tel que,</u> $\forall\ v \in V$, <u>l'on ait</u> :

$$a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2} = \langle f, v\rangle$$

<u>de plus, il existe</u> $C > 0$ <u>tel que</u> :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{[H^1(\Omega)]'}.$$

On désigne par $\mathcal{G}_\lambda$ l'application $[H^1(\Omega)]' \to V$ que nous venons de définir. Soit $\mathcal{G}_\lambda^{(0)}$ la restriction de $\mathcal{G}_\lambda$ à $L^2(\Omega)$ et soit $\mathcal{G}_\lambda^{(i)}$ l'application définie sur $L^2(\Omega)$ par :

$$\mathcal{G}_\lambda f = \mathcal{G}_\lambda^{(i)} f_i \quad \text{si} \quad f + D_i f_i = 0 \quad .$$

Avec ces notations, si $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega , V)$, on a :

$$u = \mathcal{G}_\lambda^{(0)} f_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{G}_\lambda^{(i)} f_i \quad .$$

Nous allons démontrer un théorème qui nous assure que les applications $\mathcal{G}_\lambda^{(i)}$ sont du type (r , ν) et que l'application $\mathcal{G}_\lambda^{(0)}$ est de type (r_0 , ν) . On dit qu'une application $f \to Tf$ définie dans $L^a(\Omega)$ est de type (a , b) si $\exists$ $c > 0$ tel que :

$$\|Tf\|_{L^b} \leq C\|f\|_{L^a} , \quad \forall \ f \in L^a(\Omega) \quad .$$

IV

Nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Nous appellerons $\{u\}^k$ (resp. $\{u\}_k$) la fonction obtenue en tronquant supérieurement (resp. inférieurement) u au niveau k :

$$\{u\}^k = \inf\{u , k\} ; \quad \{u\}_k = \sup\{u , k\} \quad .$$

HYPOTHÈSE B. - Il existe un nombre $k_0 \geq 0$ tel que, si $v \in V$, alors $\{v\}^k \in V$ si $k \geq k_0$, et $\{v\}_k \in V$ si $k \leq -k_0$.

REMARQUE. - Si $V = H_0^1(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$, l'hypothese B est satisfaite avec $k_0 = 0$.

THÉORÈME 1. - Si $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega , V)$, les hypothèses A et B étant satisfaites, il existe une constante $N > 0$ telle que l'on ait :

(2) $$\|u\|_{L^\nu} \leqslant N(\|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^r} + \|f_0\|_{L^{r_0}})$$

<u>où $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{r} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})$ lorsque cette quantité est strictement positive et $\nu = \infty$ dans les autres cas.</u>

Il suffira de démontrer ce théorème lorsque $d_i = c = 0$ et que λ est suffisamment grand. Supposons en effet le théorème vrai dans ce cas ; on va écrire alors :

(3) $$a_0(u , v) + \overline{\lambda}(u , v)_{L^2} = \int_\Omega [\overline{f}_0 v + \sum \overline{f}_i D_i v] dx$$

où a_0 est ce que devient la forme a quand on y remplace d_i et c par 0 et :

$$\overline{f}_0 = f_0 - cu + (\overline{\lambda} - \lambda) u , \quad \overline{f}_i = f_i - d_i u \quad .$$

Puisque $c(x) \in L^c$ où $\frac{1}{c} < 1 - \frac{2}{\alpha}$ et $u \in L^\alpha$, l'on a $cu \in L^t$ avec $\frac{1}{t} < 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})$, et il en découle que $\overline{f}_0 \in L^s$ avec $\frac{1}{s} < 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Puisque $d_i \in L^d$ où $\frac{1}{d} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$, l'on a $d_i u \in L^\ell$ avec $\frac{1}{\ell} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}$

On peut donc déduire de (3), en utilisant le cas supposé vrai du théorème 1, compte tenu de ce que $s , \ell > 2$, que $u \in L^{\alpha_1}$ avec $\alpha_1 > \alpha$. Ensuite, si $u \in L^{\alpha_1}$, il en découle, de la même façon, que $u \in L^{\alpha_2}$ avec $\alpha_2 > \alpha_1$ (et plus précisément $\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha}$). On peut refaire le même raisonnement jusqu'à ce que α_n rattrape r.

Donc on supposera désormais que $a(u , v) = a_0(u , v)$.

Pour démontrer le théorème 1 on va utiliser deux types d'inégalités ; les inégalités qui résultent du fait que $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega , V)$, qu'on peut appeler inégalités d'énergie généralisées, et les autres qui résultent de l'hypothèse A, c'est-à-dire des inégalités de Sobolev. Mais il est utile de commencer par démontrer le résultat que voici :

LEMME PRÉLIMINAIRE. - Soit $\varphi(t)$ une fonction non négative, non croissante définie pour $t \geqslant k_0 \geqslant 0$. Si pour tous les h et k vérifiant $h > k > k_0$, on a :

$$\varphi(h) \leqslant \frac{C}{(h-k)^{\alpha}} [\varphi(k)]^{\beta}$$

C , α , β étant des constantes positives et $\beta \neq 1$, on a alors, en posant $\nu = \frac{\alpha}{(1-\beta)}$:

1° Si $\beta < 1$, il existe une constante $C_1 > 0$, ne dépendant ni de φ ni de k_0 , telle que si $h > k_0$:

$$\varphi(h) \leqslant \frac{C_1}{h^{\nu}} [C^{1/(1-\beta)} k_0^{\nu} \varphi(k_0)] \quad .$$

2° Si $\beta > 1$,

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \quad \text{où} \quad d^{\alpha} = C2^{\alpha-\nu}[\varphi(k_0)]^{\beta-1} \quad .$$

DÉMONSTRATION. -

1° On pose :

$$\varphi(h) = \frac{\psi(h)}{h^{\nu}} C^{1/(1-\beta)}$$

d'où il résulte, pour $h > k$:

$$\psi(h) \leqslant [\psi(k)]^{\beta} \left[\frac{h}{(h-k)^{1-\beta} k^{\beta}}\right]^{\nu}$$

Maintenant , si $h = 2k$, on a :

$$\psi(2k) \leqslant 2^{\nu} [\psi(k)]^{\beta}$$

et si on pose encore :

$$C' = \max_{k_0 < k < 2k_0} \psi(k) \leqslant C^{1/(\beta-1)} (2k_0)^{\nu} \varphi(k_0)$$

on trouve :

$$\psi(2^n k) \leqslant [\psi(k)]^{\beta^n} 2^{\nu \sum_{i=1}^{n} \beta_i} \leqslant (1 + C') 2^{-\nu/1-\beta}$$

et le lemme en résulte.

2° On pose

$$k_n = k_0 + d(1 - \frac{1}{2^n})$$

et on démontre par récurrence que :

$$\varphi(k_n) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{2^{-\nu n}} \quad .$$

On en déduit le lemme en faisant tendre n vers l'infini.

On introduit les <u>notations</u> suivantes :

$$A^+(k) = \{x \; ; \; x \in \overline{\Omega} , \quad u(x) \geqslant k\}$$

$$A^-(k) = \{x \; ; \; x \in \overline{\Omega} , \quad u(x) \leqslant k\} \quad .$$

On se servira de la notation $A(k)$ pour énoncer des relations valables aussi bien pour $A^+(k)$ que pour $A^-(k)$.

$$u_k^p = \int_{A(k)} |u - k|^p \, dx = \int_\Omega |u - \{u\}^k|^p \, dx$$

$$\nabla_k^2 = \int_{A(k)} \sum |D_i \, u|^2 \, dx = \int_\Omega \sum |D_i[u - \{u\}^k]|^2 \, dx$$

a_k = mes $A(k)$.

LEMME 1. - Sous les hypothèses A et B , il existe deux constantes $\eta > 0$, $\beta_1 > 0$ telles que, si $u \in V$ et si $a_k < \eta$, l'on ait :

(4) $$u_k^2 \leqslant \beta_1 \, \nabla_k^2 \, a_k^{1-2/\alpha}$$

$$(5)\qquad a_h^{2/\alpha} \leqslant \frac{\beta_1}{(h-k)^2}\,\nabla_k^2 \qquad (h > k)$$

DÉMONSTRATION. - Si $u \in V$, $k > k_0$, d'après l'hypothèse B :

$$u - \{u\}^k \in V \quad .$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'hypothèse A, on a :

$$u_k^2 \leqslant \{u_k^\alpha\}^{2/\alpha}\, a_k^{1-2/\alpha} \leqslant \beta(u_k^2 + \nabla_k^2)\, a_k^{1-2/\alpha} \quad .$$

On peut choisir η assez petit pour que $\beta\eta^{1-2/\alpha} < 1$ et alors on a l'inégalité (4).

Si $h > k$ on a :

$$|h-k|^2\, a_h^{2/\alpha} \leqslant \left[\int_{A^+(h)} |u-k|^\alpha\, dx\right]^{2/\alpha} \leqslant [u_k^\alpha]^{2/\alpha} \leqslant \beta(u_k^2 + \nabla_k^2) \quad .$$

D'après (4) on a alors l'inégalité (5).

Démonstration analogue si $A(k) = A^-(k)$.

Le résultat suivant est l'inégalité d'énergie généralisée.

LEMME 2. - Si $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega\,, V)$, si les hypothèses A et B sont satisfaites, et si $\lambda > \bar{\lambda} > 0$, il existe deux constantes γ, Λ telles que si $|k| > k_0$, on ait :

$$(6)\qquad \nabla_k^2 \leqslant \gamma u_k^2 + \Lambda F_r^2\, a_k^{1-2/r}$$

où :

$$F_r = \sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^r(\Omega)} + \|f_0\|_{L^{r_0}(\Omega)} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Puisque $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega\,, V)$:

$$a(u\,, v) = \langle f\,, v\rangle\,, \quad \forall\ v \in V \quad .$$

On pose $v = u - \{u\}^k$ ($\in V$ par l'hypothèse B) et on obtient :

$$\int_{A(k)} \sum a_{ij}(x)\, D_i u\, D_j u\, dx + \int_{A(k)} \sum b_i(x)\, D_i u[u-k]\, dx + \lambda \int_{A(k)} u[u-k]\, dx$$
$$= \int_{A(k)} \sum f_i\, D_i u\, dx + \int_{A(k)} f_0[u-k]\, dx \quad .$$

On a évidemment $\int u[u-k]\,dx \geq 0$, et d'après (1) :

$$\mu \nabla_k^2 \leq \int \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, D_i u\, D_j u\, dx \quad .$$

Maintenant, si on fixe $\sigma > 0$, on peut trouver un nombre $L(\sigma)$ de façon que l'on ait :

$$\int_{A(k)} \sum b_i(x)\, D_i u[u-k]\, dx \leq \sigma \nabla_k^2 + L(\sigma)\, u_k^2$$

(c'est essentiellement ce que nous avons démontré en II).

De plus, on a :

$$2 \int_{A(k)} f_i\, D_i u\, dx \leq \sigma \nabla_k^2 + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \int_{A(k)} f_i^2\, dx \leq \sigma \nabla_k^2 + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \|f_i\|_{L^r}\, a_k^{1-2/r}$$

et enfin on trouve, en changeant au besoin la fonction $L(\sigma)$:

$$\int_{A(k)} f_0[u-k]\, dx \leq \|f_0\|_{L^t}\, [u_k^\alpha]^{1/\alpha} \leq \beta \|f_0\|_{L^t}\, (u_k^2 + \nabla_k^2)^{1/2}$$
$$\leq \beta(\sigma[\nabla_k^2 + u_k^2] + L(\sigma)\, \|f_0\|^2_{L^t})$$

où $\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{\alpha}$ et

$$\|f_0\|^2_{L^t} \leq \|f_0\|^2_{L^{r_0}}\, a_k^{2/t-2/r_0} = \|f_0\|^2_{L^{r_0}}\, a_k^{1-2/r} \quad .$$

<u>Fin de la démonstration du théorème 1.</u> – D'après les lemmes 1 et 2, plus exactement d'après (4) et (6), l'on a :

$$\nabla_k^2 \leq \gamma\beta_1\, \nabla_k^2\, a_k^{1-2/\alpha} + F_r^2\, a_k^{1-2/r} \quad ,$$

si $a_k < \eta$ et $\gamma\beta_1\, \eta^{1-2/\alpha} < 1$, on a :

$$\nabla_k^2 \leq \beta_2\, F_r^2\, a_k^{1-2/r} \quad .$$

De là et de (5), on conclut :

$$a_h^{2/\alpha} \leq \frac{\beta_3\, F_r^2}{(h - k)^2}\, a_k^{1-2/r}$$

c'est-à-dire qu'il existe $\bar{k}$ tel que, si $|k| > \bar{k}$:

$$\text{mes } A(h) = a_h \leq \frac{\beta_4\, F_r^\alpha}{(h - k)^\alpha}\, a_k^{(1-2/r)\alpha/2} = \frac{\beta_4\, F_r^\alpha}{(h - k)^\alpha}\, [\text{mes } A(k)]^{\alpha(1/2-1/r)} \quad .$$

D'après le lemme préliminaire où l'on fait :

$$\varphi(t) = \text{mes } A(t) \ ; \quad \alpha = \alpha \ , \quad \beta = \alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{\nu} = (1 - \beta)/\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

on a la conséquence suivante :

Si $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega\ , V)$, les hypothèses A et B étant vérifiées, il existe deux constantes $C_1 > 0$, $k_1 > 0$ telles que si $k > k_1$, on a :

$$\text{mes } A(k) = \text{mes } \{x \ ; \ |u(x)| \geq k\} \leq \frac{C_1}{k^\nu}\, [F_r^\nu + k_1^\nu\, \text{mes } A(k_1)]$$

si $\frac{1}{r} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$, et

$$\text{mes } A(k_1 + d) = 0 \quad \text{où} \quad d^\alpha = 2^{\alpha-\nu}[\text{mes } A(k_1)]^{\alpha(1/2-1/r-1/\alpha)}\, F_r^\alpha$$

si $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$.

k_1 doit être choisi de façon que mes $A(k_1) < \eta$.

Puisque $u \in L^2(\Omega)$, on peut satisfaire cette inégalité en choisissant :

$$k_1 = \frac{\|u\|_{L^2}}{\eta}$$

et donc on a :

$$k_1^{\nu} \text{ mes } A(k_1) \leqslant \frac{\|u\|^{\nu}_{L^2}}{\eta^{\nu-1}} \quad .$$

On a alors :

$$\text{mes } \{x \ ; \ |u(x)| \geqslant k\} \leqslant \frac{C_2}{k^{\nu}} [F_r^{\nu} + \|u\|^{\nu}_{L^2}]$$

si $\frac{1}{r} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$ et :

$$\sup |u(x)| \leqslant C_2 [F_r + \|u\|_{L^2}]$$

si $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$.

Si $\nu = \infty$, la démonstration du théorème 1 est achevée. Il nous reste à examiner le cas $\nu < \infty$.

Rappelons qu'une transformation linéaire T de L^a dans l'espace des fonctions mesurables est de type (a , b) faible s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :

$$\text{mes } \{x \ ; \ |Tf(x)| \geqslant y\} \leqslant C \left(\frac{\|f\|_{L^a}}{y} \right)^b \ , \quad \forall \ f \in L^a \quad .$$

Revenons aux applications $\mathcal{S}_{\lambda}^{(0)}$, $\mathcal{S}_{\lambda}^{(i)}$ que nous avons déjà considérées. Maintenant on peut dire que ces applications sont de type faible (r_0 , ν) et (r , ν) .

On utilise alors le <u>théorème de Marcinkiewicz</u> (ZYGMUND [9]) :

Soit T une application de type faible (a_1 , b_1) et (a_2 , b_2) où :

$$0 \leqslant \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{b_i} \leqslant 1 \qquad (i = 1 , 2) \quad .$$

Alors T est aussi de type fort (a , b) pourvu que :

$$\frac{1}{a} = (1 - t)/a_1 + t/a_2 \ , \ \frac{1}{b} = (1 - t)/b_1 + t/b_2 \qquad (0 < t < 1) \quad ,$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $K(t)$ telle que :

$$\|Tf\|_{L^b} \leq K(t) \ \|f\|_{L^a} \quad .$$

Ce théorème permet d'achever la démonstration du théorème 1 en faisant varier r .

REMARQUE 1. - Par la même méthode, on peut aussi démontrer le théorème 1, quand $\frac{1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{c} = 1 - \frac{2}{\alpha}$. Nous ne le faisons pas ici.

REMARQUE 2. - L'inégalité du théorème 1 est uniforme lorsque les a_{ij} varient de façon que (1) soit uniformément satisfaite, c dans un ensemble borné de L^c , les d_i dans un ensemble borné de L^d et les b_i dans un ensemble borné de fonctions uniformément sommables dans L^b .

REMARQUE 3. - Le théorème 1 donne aussi des majorations dans L^ν des solutions $u \in H^2_{loc}(\Omega) \cap V$ d'une équation (de type non variationnel) :

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = f$$

où $\partial a_{ij}/\partial x_i \in L^b(\Omega)$.

Il suffit d'écrire cette équation sous la forme :

$$\sum_i D_i\Big(\sum_j a_{ij} \ D_j \ u\Big) - \sum_{i,j} D_i \ a_{ij} \ D_j \ u = f \quad .$$

V

On va maintenant revenir sur l'hypothèse A en supposant que $V = H^1(\Omega)$. Nous désignerons par $I(x \ , \ \rho)$ la boule de centre x et de rayon ρ , et par $\Gamma(x \ , \ \rho)$ sa frontière. Si $\Sigma(x)$ est un ensemble mesurable de $\Gamma(x \ , \ 1)$ nous appellerons $|\Sigma(x)|$ sa mesure à $m - 1$ dimensions et $S(x \ , \ \rho)$ l'ensemble des points de $I(x \ , \ \rho)$ que x projette dans $\Sigma(x)$.

On dit que l'ouvert Ω satisfait à une condition de cône généralisée d'ordre p. $(p \geqslant 1)$, s'il existe une constante $\rho > 0$ et, pour tout $x \in \Omega$, un ensemble $\Sigma(x)$ de $\Gamma(x, 1)$ tels que :

$$S(x, \rho) \subset \Omega$$

et de plus,

$$1/|\Sigma(x)| \in L^p(\Omega) \qquad .$$

Il est facile de démontrer que si Ω satisfait à une condition de cône généralisée d'ordre p où :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \qquad ,$$

alors Ω vérifie l'hypothèse A ([8]).

En particulier, si $p = +\infty$, c'est-à-dire si $|\Sigma(x)| \geqslant \varphi > 0$ on a $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$, et on retrouve ainsi la condition de cône habituelle.

VI

Nous allons maintenant supposer que les f_0, f_i sont telles que les solutions $u \in \mathcal{E}_\lambda(\Omega, V)$ sont bornées, et étudier si ces solutions sont continues et höldériennes. Il faudra diverses hypothèses sur Ω.

A ce propos, on va introduire la définition suivante : Soient A un ouvert borné de R^m, q une constante > 1 et q^* la constante telle que $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$. Pour β constante non négative, on désigne par $\mathcal{F}(A, \beta, q)$ la famille des sous-ensembles B de $\overline{A}$ tels que l'on ait

$$\|u\|_{L^{q^*}(A)} \leqslant \beta \sum_{i=1}^{m} \|D_i u\|_{L^q(A)}$$

pour toute fonction u de $C^1(\overline{A})$ nulle sur B.

On dit que Ω est admissible par rapport à $H_0^1(\Omega)$ s'il existe deux constantes $\beta > 0$, $\overline{\rho} > 0$, telles que l'on ait :

$$\partial\Omega \cap I(y , \rho) \in \mathfrak{S}[\Omega(y , \rho) , \beta , q] , \quad \forall \; y \in \partial\Omega , \quad \rho < \overline{\rho} \quad (1 \leqslant q \leqslant 2)$$

où

$$\Omega(y , \rho) = \partial\Omega \cap I(y , \rho) \quad .$$

J'ai démontré ([7]), dans le cas b_i , c bornés et $d_i = 0$, le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si $u \in \mathcal{E}_0(\Omega , H_0^1(\Omega))$ et si Ω est admissible par rapport à $H_0^1(\Omega)$, si de plus $f_0 \in L^{r_0}(\Omega)$, $f_i \in L^r(\Omega)$ $(i = 1 , \ldots , m)$ $\left(\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} + \frac{1}{m}\right)$, où $r > m$, alors u satisfait à une condition de Hölder sur $\overline{\Omega}$.

Un théorème analogue, valable sous les hypothèses plus larges en ce qui concerne les coefficients b_i , c , d_i mais plus strictes en ce qui concerne l'ouvert Ω a été démontré par C. B. MORREY.

J'ai aussi démontré des théorèmes de ce genre pour d'autres problèmes aux limites que celui de Dirichlet, à savoir le problème de Neumann et le problème mêlé de Neumann-Dirichlet. Je renvoie à ce propos à l'article déjà cité [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DE GIORGI (E.). - Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Acad. Sc. Torino, t. 3, 1957, p. 25-43.

[2] MORREY (C. B.). - Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Z., t. 72, 1959, p. 146-164.

[3] MOSER (Jürgen). - A new proof of de Giorgi's théorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 13, 1960, p. 457-468.

[4] NASH (J.). - Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 931-954.

[5] STAMPACCHIA (Guido). - Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche, Annali Scuola norm. sup. di Pisa, Série 3, t. 12, 1958, p. 223-244.

[6] STAMPACCHIA (Guido). - Régularité des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues, International symposium on linear spaces [1960. Jerusalem].

[7] STAMPACCHIA (Guido). - Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane, Annali. Mat. pura ed appl., Série 4, t. 51, 1960, p. 1-36.

[8] STAMPACCHIA (Guido). - Sur des espaces de fonctions qui interviennent dans les problèmes aux limites elliptiques, Colloque sur l'analyse fonctionnelle [1960. Louvain] ; p. 81-89. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier Villars, 1961. (Centre belge de Recherches mathématiques).

[9] ZYGMUND (A.). - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 35, 1956, p. 223-247.