

SÉMINAIRE SCHWARTZ

JACQUES L. LIONS

Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, II

Séminaire Schwartz, tome 5 (1960-1961), exp. n° 2, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A2_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION D'OPÉRATEURS LINÉAIRES
ET QUELQUES APPLICATIONS, II.

Conférence faite par Jacques L. LIONS,
rédigée par Henri MOREL

Méthode "holomorphe"

On va donner une deuxième méthode systématique de construction de couples d'interpolation, méthode utilisant cette fois la théorie des fonctions holomorphes (vectorielles).

1. Les espaces $[A_0, A_1, \nu]$.

On désigne par $\mathcal{H}(A_0, A_1)$ l'espace des fonctions $\zeta \rightarrow u(\zeta)$ définies pour $\zeta = \xi + i\eta$, $0 \leq \xi \leq 1$, à valeurs dans $A_0 + A_1$, ayant les propriétés suivantes :

(i) $\zeta \rightarrow u(\zeta)$ est holomorphe dans $0 < \xi < 1 \rightarrow A_0 + A_1$, continue et bornée dans $0 \leq \xi \leq 1 \rightarrow A_0 + A_1$;

(ii) $u(i\eta) \in A_0$, $\eta \rightarrow u(i\eta)$ étant continue et bornée de $\mathbb{R} \rightarrow A_0$; on posera

$$\|u\|_0 = \sup_{\eta} \|u(i\eta)\|_{A_0} \quad ;$$

(iii) $u(1 + i\eta) \in A_1$, $\eta \rightarrow u(1 + i\eta)$ étant continue et bornée de $\mathbb{R} \rightarrow A_1$, on posera

$$\|u\|_1 = \sup_{\eta} \|u(1 + i\eta)\|_{A_1} \quad .$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)} = \max(\|u\|_0, \|u\|_1)$$

on vérifie (à l'aide du théorème des trois droites) que $\mathcal{H}(A_0, A_1)$ est un espace de Banach.

Si maintenant ν est une mesure sur $[0, 1]$, ou une distribution à support compact sur $]0, 1[$, on définit, pour toute $u \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ l'intégrale

$$\int_0^1 u(\xi) d\nu(\xi) \in A_0 + A_1$$

(pour le cas où ν est une distribution, cf. [4]), l'application

$$(1.1) \quad u \rightarrow \int_0^1 u(\xi) d\nu(\xi)$$

est continue de $\mathcal{K}(A_0, A_1) \rightarrow A_0 + A_1$.

On désigne alors par $[A_0, A_1, \nu]$ l'image de $\mathcal{K}(A_0, A_1)$ dans l'application (1.1) ; muni de la norme (quotient)

$$(1.2) \quad \|a\|_{[A_0, A_1, \nu]} = \inf_{\int_0^1 u(\xi) d\nu(\xi) = a} \|u\|_{\mathcal{K}(A_0, A_1)},$$

l'espace $[A_0, A_1, \nu]$ est un espace de Banach.

Les espaces $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$, $0 < \theta < 1$, ont été introduits simultanément et indépendamment par A.L. CALDERON [cf. Conférence de Varsovie septembre 1960 (à paraître)] et J.-L. LIONS, [1].

2. Propriétés d'interpolation.

THÉORÈME 2.1. - Si $\pi \in \mathcal{L}(A_0; B_0) \cap \mathcal{L}(A_1; B_1)$ (notations de l'exposé n° 1 de ce séminaire), alors, quel que soit ν , π applique linéairement et continûment $[A_0, A_1, \nu]$ dans $[B_0, B_1, \nu]$, avec une norme $\leq \max(\varpi_0, \varpi_1)$, si $\varpi_j =$ norme de ϖ dans $\mathcal{L}(A_j; B_j)$, $j = 0, 1$, conséquence facile des définitions.

Il serait intéressant d'obtenir une majoration de la norme de π dans $\mathcal{L}([A_0, A_1, \nu]; [B_0, B_1, \nu])$ au moyen de ϖ_0, ϖ_1 et ν .

On peut répondre à cette question dans le cas $\nu = \delta(\theta)$, en notant que

$$\|a\|_{[A_0, A_1, \delta(\theta)]} = \inf_{u(\theta)=a} \|u\|_0^{1-\theta} \|u\|_1 \quad .$$

THÉORÈME 2.2. - Si $\nu = \delta(\theta)$, la norme de π dans $\mathcal{L}([A_0, A_1, \delta(\theta)]; [B_0, B_1, \delta(\theta)])$ est $\leq \varpi_0^{1-\theta} \varpi_1^\theta$.

THÉORÈME 2.3. - Si $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$, les injections étant continues, et si $a, b \rightarrow K(a, b)$ est une application bilinéaire continue de $A_1 \times B_1 \rightarrow C_1$ et de $A_0 \times B_0 \rightarrow C_0$ (C_0, C_1, C troisième triplet comme A_0, A_1, α) alors

$a, b \rightarrow K(a, b)$ est une application bilinéaire continue de $[A_0, A_1, \delta(\theta)] \times [B_0, B_1, \delta(\theta)] \rightarrow [C_0, C_1, \delta(\theta)]$.

3. Espaces $[A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)], [A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)}$.

Notons d'abord ceci :

$$(3.1) \quad [A_0, A_1, \delta(\theta)] \subset [A_0, A_1, \delta'(\theta)] \subset \dots \subset [A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)] \subset \dots$$

les injections étant continues ($\delta^{(m)}(\theta)$ = dérivée d'ordre m de la masse 1 au point θ ; $0 < \theta < 1$).

Désignons par $\mathcal{K}^{(m)}(A_0, A_1)$ l'espace des fonctions $u(\zeta)$ telles que $u, u', \dots, u^{(m)} \in \mathcal{K}(A_0, A_1)$, muni de la norme naturelle. On introduit alors l'application $u \rightarrow \int_0^1 u(\xi) d\nu(\xi)$, comme au numéro 1, cette fois de $\mathcal{K}^{(m)}(A_0, A_1)$ dans $A_0 + A_1$. On désigne par $[A_0, A_1, \nu]_{(m)}$ l'image de $\mathcal{K}^{(m)}(A_0, A_1)$ dans cette application, munie de la norme quotient (On a : $[A_0, A_1, \nu]_{(0)} = [A_0, A_1, \nu]$)

On a alors :

$$(3.2) \quad [A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)]_{(m)} \subset [A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m-1)} \subset \dots \subset [A_0, A_1, \delta(\theta)]$$

les injections étant continues.

4. Remarques diverses :

- Extension à $n + 1$ espaces A_0, \dots, A_n .
- Cas où les A_j ne sont pas des espaces de Banach.
- Interpolation par rapport à une famille $\pi(\zeta)$ d'opérateurs dépendant analytiquement de ζ (cf. LIONS [1]).

5. Exemples.

5.1. - Si $A_0 = L^{p_0}$, $A_1 = L^{p_1}$, alors $[A_0, A_1, \delta(\theta)] = L^{p_\theta}$ où
$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
.

Ceci, et le théorème (2.2), donne Riesz - Thorin.

5.2. - Si $A_0 = L^p_{M_0}$, $A_1 = L^p_{M_1}$ (espaces L^p pour les mesures $M_i d\mu$, $M_i > 0$ localement μ -intégrable), alors

$$[A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)] = L_{X_m}^p, \quad X_m = M_0^{1-\theta} M_1^\theta (1 + |\text{Log} \frac{M_1}{M_0}|^m)^{-p}$$

$$[A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)} = L_{Y_m}^p, \quad Y_m = M_0^{1-\theta} M_1^\theta (1 + |\text{Log} \frac{M_1}{M_0}|^m)^p$$

5.3. - \mathfrak{F} désigne la transformation de Fourier sur \mathbb{R}^n , variable duale y . On désigne par $H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = H^{\alpha,p}$ l'espace des distributions tempérées f telles que

$$\mathfrak{F}^{-1}((1 + y^2)^{\alpha/2} \mathfrak{F}f) \in L^p,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^{\alpha,p}} = \|\mathfrak{F}^{-1}((1 + y^2)^{\alpha/2} \mathfrak{F}f)\|_{L^p}.$$

Alors, si $1 < p < \infty$,

$$[A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)] = \{f, (1 + \text{Log}(1 + y^2))^{-m} (1 + y^2)^{\frac{\alpha(\theta)}{2}} \mathfrak{F}f \in \mathfrak{S}L^p, \quad \alpha(\theta) = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1\}$$

et $[A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)}$ s'obtient en remplaçant m par $-m$ dans cette définition.

5.4. - Naturellement ces exemples donnent des théorèmes d'interpolation entre espaces de types différents. Par exemple, si π est un opérateur linéaire continu de $H^{1,p}$ dans L^{q_0} , et de $H^{0,p}$ dans L^{q_1} , alors c'est un opérateur linéaire continu de $[H^{1,p}, H^{0,p}, \delta'(\theta)]$ dans $[L^{q_0}, L^{q_1}, \delta'(\theta)]$.

Appliquons ceci avec $\pi = \text{injection}$, $q_1 = p$, q_0 donné par le théorème de Sobolev : $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (> 0). On en déduit que tout élément f de $[H^{1,p}, H^{0,p}, \delta'(\theta)]$ (i. e. vérifiant $\frac{(1 + y^2)^{(1-\theta)/2}}{1 + \text{Log}(1 + y^2)} \mathfrak{F}f \in \mathfrak{S}L^p$) appartient à $[L^{q_0}, L^{q_1}, \delta'(\theta)]$, et l'on montre que ceci implique $\frac{M^{1-\theta}}{1 + |\text{Log} M|} f \in L^p$, pour toute fonction $M > 0$, et appartenant à L^n .

5.5. (CALDERON, Conférence de Varsovie, septembre 1960). - Soit L_Φ l'espace d'Orlicz associé à une fonction Φ strictement croissante, telle que $\Phi(s)/s \rightarrow 0$ (resp. ∞) lorsque $s \rightarrow 0$ (resp. ∞); L_Φ^0 désigne l'adhérence dans L_Φ des fonctions simples. Alors si $A_0 = L_{\Phi_0}^0$, $A_1 = L_{\Phi_1}^1$, l'espace $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$ est L_Φ^0 où Φ est définie par

$$\Phi(s^{1-\theta} t^\theta) = \Phi_0(s) = \Phi_1(t) \quad .$$

5.6. - Il serait intéressant de comparer les espaces $[A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)}$, $[A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)]$ aux espaces $T(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$ lorsque $\frac{1}{p} + \alpha = \frac{1}{q} + \beta = \theta$.

On vérifie ceci (cf. LIONS - MAGENES, [2]), pour $1 < p < \infty$,

$$(5.1) \quad H^{1-\theta+\varepsilon, p} \subset W^{1-\theta, p} \subset H^{1-\theta-\varepsilon, p}, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \quad .$$

[On n'a pas $H^{1-\theta, p} = W^{1-\theta, p}$, $p \neq 2$ (cf. J.-P. KAHANE, Communication personnelle), $W^{1-\theta, p}$ est défini au paragraphe 6 de l'exposé n° 1 de ce Séminaire].

La démonstration de (5.1) et des exemples (5.3) utilise un théorème de MIKHLIN [3].

5.7. - Dans le cas hilbertien (cf. exposé n° 1, § 6, 2°) on a :

$$T(2, \alpha, A_0; 2, \alpha, A_1) = [A_0, A_1, \delta(\theta)], \quad \frac{1}{2} + \alpha = \theta \quad .$$

La démonstration de ce point est très voisine de la démonstration de N. ARONSAJN [1958, Communication personnelle] du résultat d'interpolation de LIONS, [cf. exposé n° 1, § 1. ARONSAJN, Conférence de Berkeley, Avril (à paraître) et KREIN (S. G.), Conférence de Varsovie, septembre 1960 (à paraître)].

5.8. - Il y a une infinité de problèmes non résolus, consistant à étudier les propriétés des espaces $[A_0, A_1, \nu]$ pour divers ν et divers A_0, A_1 .

$$\begin{aligned} \text{EXEMPLE. - } A_0 &= \mathcal{L}(L^{p_0}; L^{q_0}) \\ A_1 &= \mathcal{L}(L^{p_1}; L^{q_1}) \quad . \end{aligned}$$

Que peut-on dire de l'espace $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$?

Autre problème : Quand a-t-on

$$[[A_0, A_1, \delta(\theta_1)], [A_0, A_1, \delta(\theta_2)], \delta(\theta_3)] = [A_0, A_1, \delta(\theta_1 + \theta_2 \theta_3 - \theta_1 \theta_3)] ?$$

Autre problème : Dual de $[A_0, A_1, \nu]$?

Références bibliographiques.

- [1] LIONS (Jacques-Louis). - Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1853-1855.
 - [2] LIONS (J.-L.) e MAGENES (E). - Problemi ai limiti non omogenoi, III., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, t. 15, 1961 (à paraître).
 - [3] MIKHLIN (S. G.). - O mul'tiplikatorakh integralov fur'e, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 109, 1956, p. 701-703.
 - [4] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 ; et t. 8, 1958, p. 1-209.
-