Bernard Malgrange

La méthode de Calderón (suite)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A9_0>

12 janvier 1960

LA MÉTHODE DE CALDERÓN (suite)

par Bernard MALGRANGE

Soit $P(x , t , Dx , Dt)$ un opérateur différentiel linéaire homogène d'ordre m

$$P(x , t , Dx , Dt) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(x , t , Dx) \frac{\partial^{m-j}}{\partial t^{m-j}}$$

avec

$$Q_j(x , t , Dx) = \sum_{|k|=j} a_{j,k}(x , t) D_x^k \qquad t \in \underset{\sim}{R} \qquad x \in \underset{\sim}{R}^n \quad n \neq 2$$

les coefficients $a_{j,k}(x , t)$ étant définis au voisinage de zéro et étant $1 + s$ $(s > 0)$ fois continuement différentiables, (i. e. les dérivées premières vérifient les conditions de Holder d'ordre s).

On se propose de démontrer dans cet exposé certaines inégalités portant sur $P(x , t , Dx , Dt)$ analogues à celles obtenues dans l'exposé précédent.

On pose $Q_j(x , t , \xi) = (-1)^j \sum_{|k|=j} a_{j,k}(x , t) \xi^k \qquad \xi \in \underset{\sim}{R}^n$

On sera amené à faire les hypothèses suivantes :

1° Hypothèse (S) : Pour tout $\xi \neq 0$ et (x , t) voisin de zéro, les racines de

$$\tau^m + \sum_j Q_j(x , t , \xi) \tau^{m-j} = 0 \tag{1}$$

sont distinctes ([1]).

2° L'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

Hypothèse (R) : les $a_{j,k}$ sont à valeurs réelles.

Hypothèse (E) : $P(x , t , Dx , Dt)$ est elliptique (i. e. les racines de l'équation (1) ne sont jamais réelles ([2]).

REMARQUE. - Les coefficients $a_{j,k}$ étant continus, P vérifie les hypothèses (S) ou (E) s'il les vérifie pour $(x , t) = 0$.

Diagonalisation. - On va se ramener aux inégalités de l'exposé 8 par une "diagonalisation approximative". Pour cela, on considère a priori la matrice $m \times m$.

$$h(x\ ,\ t\ ,\ \xi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & -1 \\ (-1)^m c_m(x\ ,\ t\ ,\ \xi)\ |\xi|^{-m} & & \cdots & & -c_1(x\ ,\ t\ ,\ \xi)\ |\xi|^{-1} \end{pmatrix}$$

Le lecteur vérifiera aisément que le polynôme caractéristique de la matrice h est le polynôme (1). Si l'on suppose que $P(x\ ,\ t\ ,\ Dx\ ,\ Dt)$ vérifie l'hypothèse (S), les hypothèses faites sur les coefficients $a_{j,k}$ impliquent qu'il existe m fonctions $\lambda_j(x\ ,\ t\ ,\ \xi)$ homogènes de degré zéro en ξ, définies pour $(x\ ,\ t)$ voisin de $(0\ ,\ 0)$, $1 + s$ fois continuement différentiables en $(x\ ,\ t)$ à valeur dans $\hat{\Sigma}$ telles que $\lambda_j(x_0\ ,\ t_0\ ,\ \xi_0)$ soient les m valeurs propres de la matrice $h(x_0\ ,\ t_0\ ,\ \xi_0)$ (Pour $n = 2$ on ne peut rien dire car $R^2 - \{0\}$ n'est pas simplement connexe. On verra dans l'exposé suivant comment se lève cette restriction). L'hypothèse (S) nous affirme de plus que les $\lambda_j(x_0\ ,\ t_0\ ,\ \xi_0)$ sont distinctes, donc la matrice $h(x\ ,\ t\ ,\ \xi)$ est diagonalisable.

Il existe alors une matrice $m \times m$, $n(x\ ,\ t\ ,\ \xi)$ homogène de degré 0 en ξ telle que

$$nhn^{-1} = \delta$$

avec

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1(x\ ,\ t\ ,\ \xi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(x\ ,\ t\ ,\ \xi) \end{pmatrix}$$

il est d'ailleurs facile de calculer n

$$n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (-\lambda_1) & \cdots & (-\lambda_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (-\lambda_1)^{m-1} & \cdots\cdots & (-\lambda_m)^{m-1} \end{pmatrix}$$

$n(x\ ,\ t\ ,\ \xi)$ est donc $1 + s$ fois continuement différentiable en $(x\ ,\ t)$ à valeurs dans les matrices continuement différentiables en ξ.

En remplaçant au besoin $P(x\ ,\ t\ ,\ Dx\ ,\ Dt)$ par

$$\beta(x\ ,\ t)\ P(x\ ,\ t\ ,\ Dx\ ,\ Dt) + (1 - \beta(x\ ,\ t))\ P(0\ ,\ 0\ ,\ Dx\ ,\ Dt) \qquad ,$$

où $\beta(x\ ,\ t) \in \mathcal{D}_{x,t}$ de support assez petit et égal à 1 dans un voisinage V

de $(0, 0)$ (ce changement permet d'avoir un opérateur égal à P au voisinage de l'origine et défini partout. Le lecteur vérifiera aisément que les hypothèses (S), (R) ou (E) sont encore vérifiées par le nouvel opérateur) on a les propriétés suivantes :-

a. Les constructions précédentes peuvent être faites pour $(x, t) \in R^{n+1}$;

b. h, δ, n sont les symboles d'opérateurs intégraux singuliers (matriciels). En effet, les coefficients des matrices h, δ, n sont bien dans l'espace $\mathcal{B}^{1+s}_{x,t}(\hat{\Sigma})$ (exposé 6, paragraphe 2). Nous désignerons ces opérateurs respectivement par H, Δ, N ;

c. Si de plus, $P(x, t, Dx, Dt)$ vérifie l'hypothèse (E) ou (R) les opérateurs singuliers dont les symboles sont les parties imaginaires des λ_j sont, ou bien inversibles (i. e. leurs prolongements à H^0 sont inversibles), ou bien nuls. En effet, les hypothèses (E) ou (R) impliquent que les racines λ_j de l'équation (1) ont leurs parties imaginaires identiquement nulles ou partout différentes de zéro et dans ce dernier cas, les opérateurs λ_j sont inversibles. En effet, les opérateurs obtenus en remplaçant dans leurs symboles x, t par $(0, 0)$ sont visiblement inversibles. En choisissant $\beta(x, t)$ à support suffisamment petit, il est facile de voir qu'ils sont aussi voisins qu'on veut des précédents.

d. Pour les mêmes raisons, l'opérateur N est inversible.

Nous sommes alors en mesure de démontrer les théorèmes suivants ([3]).

THÉORÈME 1. - <u>Dans les hypothèses</u> (S) <u>et</u> "(E) <u>ou</u> (R)", <u>il existe des constantes</u> > 0 : τ_0, k_0, C, <u>et un voisinage</u> V <u>de zéro dans</u> R^n, <u>tels que, pour tout</u> $\tau \in [0, \tau_0]$, <u>pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$, <u>à support dans</u> $V \times [0, \tau]$, <u>on ait pour</u> $k \geqslant k_0$:

$$\iint e^{k(t-\tau)^2} |P\varphi|^2 \, dx\, dt \geqslant Ck \iint e^{k(t-\tau)^2} \Big\{ \sum_{|j| \leqslant m-1} |D^j_{x,t} \varphi|^2 \Big\} dx\, dt .$$

THÉORÈME 2. - <u>Dans l'hypothèse</u> "(S) <u>et</u> (E)", <u>il existe des fonctions strictement positives, définies pour</u> $\tau \in [0, \tau_1]$, $\tau_1 > 0$: $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$, $k_0(\tau)$, <u>avec</u> $C_1(\tau) \longrightarrow +\infty$ <u>si</u> $\tau \longrightarrow 0$, <u>et un voisinage</u> V de 0 dans R^n tels que, pour <u>tout</u> $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$, <u>à support dans</u> $V \times [0, \tau]$ <u>on ait pour</u> $k \geqslant k_0(\tau)$

$$\iint e^{k(t-\tau)^2} |P\varphi|^2 \, dx\, dt \geqslant \frac{C_1(\tau)}{k} \iint e^{k(t-\tau)^2} \Big\{ \sum_{|j|=m} |D^j_{x,t} \varphi|^2 \Big\} dx\, dt$$

$$+ C_2(\tau)\, k \iint e^{k(t-\tau)^2} \Big\{ \sum_{|j| \leqslant m-1} |D^j_{x,t} \varphi|^2 \Big\} dx\, dt .$$

Démontrons par exemple, le théorème 1. Le théorème 2 se démontre de manière tout à fait analogue en utilisant le théorème 2, 2°, exposé 8.

Soit $U = (u_1 , \dots , u_n)$ les $u_j(x , t)$ étant des fonctions une fois continuement dérivables de t à valeurs dans H^1_x. En posant $V = NU$ on applique les théorèmes 1 et 2 , 1° de l'exposé 8, à l'opérateur diagonal

$$\frac{dV}{dt} + i \Delta \Lambda V$$

ce qui est possible, car les parties imaginaires des symboles ne s'annulent jamais ou sont identiquement nulles. On a donc

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\|\frac{dV}{dt} + i \Delta \Lambda V\right\|^2 dt \geqslant Ck \int e^{k(t-\tau)^2} \|V\|^2 \, dt$$

en posant

$$\|V^2\| = \sum \|v_j\|^2 \quad \text{et de même pour} \quad \left\|\frac{dV}{dt} + i \Delta \Lambda V\right\|^2 .$$

Mais on a :

$$N\left(\frac{dU}{dt} + iH\Lambda U\right) = \left(\frac{dV}{dt} + i \Delta \Lambda V\right) - i(\Delta \Lambda N - NH\Lambda) U - \frac{dN}{dt} . U .$$

De plus, on a (exposé 7, théorème 3)

$$NH\Lambda - \Delta N\Lambda = \begin{cases} \text{Opérateur continu dépendant continuement} \\ \text{de } t \text{ de } L^2_x \longrightarrow L^2_x . \end{cases}$$

On a de même (exposé 7, théorème 3)

$$\Delta \Lambda N - \Delta N \Lambda = \begin{cases} \text{Opérateur continu dépendant continuement} \\ \text{de } t \text{ de } L^2_x \longrightarrow L^2_x . \end{cases}$$

Comme N est inversible, il existe alors une constante C' telle que

$$\|(\Delta \Lambda N - \Delta N \Lambda) U\|^2 \leqslant C' \|NU\|^2 .$$

On a donc

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\|N\left(\frac{dU}{dt} + iH\Lambda U\right)\right\|^2 dt \geqslant k\left(C - \frac{C'}{k}\right) \int e^{k(t-\tau)^2} \|NU\|^2 \, dt .$$

En augmentant au besoin la constante k_0 et en modifiant C , on a bien

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\|\frac{dU}{dt} + iH\Lambda U\right\|^2 dt \geqslant kC \int e^{k(t-\tau)^2} \|U\|^2 \, dt . \tag{2}$$

On prend alors φ à support compact $\subset V \times [0\,,\tau]$ et on pose

$$u_j = (i\Lambda)^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \varphi \quad .$$

Alors le premier membre de l'inégalité (2) devient

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \|P\varphi\|^2 \quad ,$$

et le deuxième membre

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \sum_j \|\Lambda^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \varphi\|^2 \, dt \quad .$$

Ce résultat joint à l'inégalité (immédiate par transformée de Fourier)

$$\|\Lambda^{m-j} \varphi\|^2 \geqslant c \sum_{|K|=m-j} \|D_x^K \varphi\|^2$$

et à l'inégalité de Trèves à une variable (exposé 8, paragraphe 1) démontre le théorème 1.

REMARQUE. - Le théorème 1 est une variante que l'on trouvera dans [3] d'un théorème de CALDERÓN [1].

Le théorème 2 dans le cas particulier où P est d'ordre 2 (et où $e^{k(t-\tau)^2}$ est remplacé par $(t + \frac{1}{k})^k$) est dû à MIZOHATA [4]. Il a été démontré dans le cas général par une autre méthode par HÖRMANDER [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.). - Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Unicité du problème de Cauchy, d'après A. P. Calderón, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 178.

[4] MIZOHATA (Sigeru). - Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 687-692.