

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 4, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A4_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

24 novembre 1959

MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}L^p$ (fin)

par Bernard MALGRANGE

(d'après CALDERÓN-ZYGMUND [2] et [3])

Soit k "une distribution v. p." (valeur principale), i. e. une distribution définie par la fonction χ , positivement homogène de degré $-n$, localement sommable dans $R^n - \{0\}$ ($\int_{\Omega} |\chi(\omega)| d\omega < +\infty$) et vérifiant $\int_{\Omega} \chi(\omega) d\omega = 0$, Ω étant la sphère unité. D'après l'exposé numéro 3, la convolution par k est continue de L^p dans L^p ($1 < p < \infty$), sous l'hypothèse additionnelle que χ est une fois continuellement différentiable dans $R^n - \{0\}$. Une autre méthode, exposée plus bas dans le paragraphe 2, conduira au même résultat, sous une hypothèse affaiblie: $\chi(\omega) + \chi(-\omega) \in L^q(\Omega)$ pour un $q > 1$. Il faut d'abord examiner la convolution des distributions "v. p." .

1. Transformées de Fourier et convolution des distributions "v. p." .

a. Transformées de Fourier des distributions "v. p." .

PROPOSITION 1. - La transformée de Fourier d'une distribution tempérée homogène de degré d est homogène de degré $-n-d$.

En effet, T est homogène de degré d si et seulement si, $\forall \lambda > 0$ et $\forall g \in \mathcal{S}$, $\langle Tx, g(\lambda x) \rangle = \lambda^{-n-d} \langle T, g \rangle$; alors,

$$\langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}g(\lambda \xi) \rangle = \lambda^{-n} \langle Tx, g(\lambda^{-1} x) \rangle = \lambda^{-n-(-n-d)} \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}g \rangle .$$

(Cette proposition a déjà été utilisée implicitement dans l'exposé numéro 3 ; homogène est mis pour positivement homogène).

PROPOSITION 2. - La transformée de Fourier d'une "distribution v. p." une fois continuellement différentiable en dehors de l'origine est une fonction homogène de degré 0, $K \in L^{\infty}_{\xi}$, vérifiant

$$\int_{\Omega_{\xi}} K(\sigma) d\sigma = 0 \quad (\Omega_{\xi} : \text{sphère unité du dual de } R^n)$$

La première affirmation est démontrée dans l'exposé précédent, et résulte aussi des propositions 1 et 3. Soit $\alpha \in \mathcal{O}$, de support dans $R^n - \{0\}$, réelle, invariante par rotation et telle que $\int t^{n-1} \mathcal{F}\alpha(t) dt \neq 0$. Par transport de structure, $\mathcal{F}\alpha$

est invariante par rotation. On a :

$$\langle k, \alpha \rangle = \int t^{-1} \chi(\omega) \alpha(t) dt d\omega = \int \chi(\omega) d\omega \int \alpha(t) t^{-1} dt = 0$$

donc,

$$\langle K, \mathcal{F}\alpha \rangle = \int t^{n-1} K(\sigma) \mathcal{F}\alpha(t) dt d\sigma = 0, \quad ,$$

donc

$$\int_{\Omega_{\xi}} K(\sigma) d\sigma = 0 \quad .$$

PROPOSITION 3. - La transformée de Fourier K d'une "distribution v. p." : $k = v. p. \chi$, p fois continuellement différentiable (c. d.) en dehors de l'origine est $p - 1$ fois c. d. (respectivement bornée continue) dans $R^n - \{0\}$ si $p \geq 2$ (respectivement $p = 1$).

Soit $\beta \in \mathcal{C}_x$, nulle pour $0 \leq |x| \leq 1$, $\beta = 1$ pour $|x| > 2$;
 $k = \beta k + (1 - \beta) k$, $(1 - \beta) k$ est à support compact, donc $\mathcal{F}(1 - \beta) k$ est analytique $\beta k = \beta \chi$; χ est homogène de degré $-n$; soit D^p une dérivation d'ordre p , quelconque :

$$D^p(\beta \chi) = O(|x|^{-n-p})$$

et est continue, donc :

$$x^{p-1} D^p \beta \chi \in L^1 \quad (x^{p-1} : \text{un monôme en } x_i, i = 1, 2, \dots, n, \text{ d'ordre } p-1)$$

donc :

$$D^{p-1} \xi^p \mathcal{F} \beta \chi \in \mathcal{F} L^1 \subset \mathcal{C}^0, \quad ,$$

ξ^p désignant le monome en ξ_i correspondant à la dérivation D^p , donc :

$$K \in \mathcal{C}^{p-1}(R^n - \{0\}) \quad .$$

PROPOSITION 4. - Soit $K(\xi)$ une fonction homogène de degré 0 et $\int_{\Omega_{\xi}} K(\sigma) d\sigma = 0$; si $K \in \mathcal{C}^p(R^n - \{0\})$, $p \geq n + 1$, alors, $\bar{\mathcal{F}}K$ est $p - n - 1$ continuellement différentiable en dehors de l'origine ; si χ est la fonction ainsi définie dans $R^n - \{0\}$, $\int_{\Omega} \chi(\omega) d\omega = 0$, et $\bar{\mathcal{F}}K = v. p. \chi$.

Soit β la fonction définie, comme précédemment, mais sur Ξ^n dual de R^n

$$K = \beta K + (1 - \beta) K \quad .$$

$\bar{\mathcal{F}}(1 - \beta) K$ est analytique (le support de $(1 - \beta) K$ est compact).

$\bar{\mathcal{F}}\beta K$? On a $D^p \beta K = O(|\xi|^{-p})$ car K est homogène de degré 0. $D^p \beta K \in \mathcal{C}^0$

donc $\int_{\Omega} \xi^{p-n-1} D^p \beta K \in L^1(\Xi^n)$ et, avec les mêmes conventions que précédemment ,

$$D^{p-n-1} x^p \bar{\mathcal{F}}(\beta K) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n)$$

donc,

$$D^{p-n-1} \bar{\mathcal{F}} \beta K \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n - \theta)$$

donc

$$\bar{\mathcal{F}} K \in \mathcal{E}^{p-n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \quad ;$$

la fonction χ ainsi définie est homogène de degré $-n$ (proposition 1) ; on montre alors, comme dans la proposition 2, que $\int_{\Omega} \chi(\omega) d\omega = 0$. On trouve donc bien ce que l'on a appelé v. p. χ , dans le complémentaire de l'origine. Donc, $\bar{\mathcal{F}} K = \text{v. p. } \chi + T$ où T est une distribution de support l'origine ; c'est une somme finie de dérivées de δ ; mais toute dérivée d'ordre d de δ est homogène d'ordre $-n-d$; il faut donc (proposition 1) que $T = C \delta$, donc

$$\bar{\mathcal{F}} K = \text{v. p. } \chi + C \delta$$

donc

$$K = \mathcal{F} \text{v. p. } \chi + C$$

$K_1 = \mathcal{F} \text{v. p. } \chi$ vérifie (proposition 2) $\int_{\Omega \xi} K_1(\sigma) d\sigma = 0$; $\int K(\sigma) d\sigma = 0$ par hypothèse, donc $C = 0$.

C. Q. F. D.

Prenons encore $K \in \mathcal{E}^p(\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogène de degré 0 sans autre hypothèse ; soit $C = \int_{\Omega \xi} K(\sigma) d\sigma$, alors $K = K_1 + C$ avec $\int K_1(\sigma) d\sigma = 0$ et d'après la proposition 4, $K_1 = \mathcal{F} \text{v. p. } \chi$ donc :

COROLLAIRE. - La transformation de Fourier est un isomorphisme de Σ et $\hat{\Sigma}$ où :

Σ : espace des distributions $C \delta + \text{v. p. } \chi$ où $\chi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n - \{0\})$

$\hat{\Sigma}$: espace des distributions K homogènes de degré 0, $K \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n - \{0\})$

Σ muni de la topologie de $\mathcal{E}(\Omega) \oplus \mathbb{R}$ et $\hat{\Sigma}$ de la topologie de $\mathcal{E}(\Omega_{\xi})$.

b. Convolution des distributions v. p.

On les suppose indéfiniment différentiables en dehors de l'origine ; et on peut supposer $C = 0$, soit $k_1 \in \Sigma$, $k_2 \in \Sigma$, sans masse à l'origine : $k_1 = \text{v. p. } \chi_1$, $k_2 = \text{v. p. } \chi_2$.

THÉORÈME 1. - $\chi_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta} = \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} \chi_1(x-y) \chi_2(y) dy$ a une limite

$\chi_1 \perp \chi_2(x)$ si ε et $\eta \rightarrow 0$ pour $x \neq 0$; cette limite $\chi_1 \perp \chi_2$ est homogène de degré $-n$, $\int_{\Omega} \chi_1 \perp \chi_2(\omega) d\omega = 0$, $\chi_1 \perp \chi_2 \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$ elle définit donc une "v. p." : $k_1 \perp k_2 = v. p. \chi_1 \perp \chi_2 \in \Sigma$ et $v. p.(\chi_1 \perp \chi_2) = k_1 * k_2 - C\delta$; $k_1 * k_2$ désignant la distribution v. p. (proposition 4) définie par $\mathcal{F}(k_1 * k_2) = K_1 K_2 (\in L^\infty)$. (On voit immédiatement par Fourier qu'elle opère par convolution dans L^2 ; de même dans L^p d'après l'exposé précédent).

DÉMONSTRATION. - Il est clair que les conditions à l'infini sont telles que $\chi_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta}$ existe. Existence de la limite : soit $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha = 1$ au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} \chi_1(x-y) \chi_2(y) dy &= \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} [\chi_1(x-y) - \chi_1(x)\alpha(y)] [\chi_2(y) - \chi_2(x)\alpha(x-y)] dy \\ &+ \chi_2(x) \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} \chi_1(x-y)\alpha(x-y) dy + \chi_1(x) \int_{\substack{|y| > \eta \\ |x-y| > \varepsilon}} \alpha(y) \chi_2(y) dy \\ &- \chi_1(x) \chi_2(x) \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} \alpha(y) \alpha(x-y) dy. \end{aligned}$$

Des quatre termes ainsi apparus, le quatrième a évidemment une limite, le deuxième et le troisième restent constants dès que ε et η sont assez petits, car alors $\alpha(x-y) = \alpha(y) = 1$ et $\int \chi_1(\omega) d\omega = \int \chi_2(\omega) d\omega = 0$. Enfin la fonction sous le premier signe d'intégration est intégrable : lorsqu'un facteur devient comme $0 \frac{1}{|y|^n}$ l'autre devient $O(|y|)$.

On vérifie facilement que la convergence est uniforme pour x dans un compact de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Donc $\chi_1 \perp \chi_2$ est continue. On a $\chi_1 \perp \chi_2 \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n - \{0\})$; ce dernier point se vérifie directement : $\chi_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta}$ a une dérivée $\chi'_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta}$ qui converge uniformément comme $\chi_1 * \chi_2$ et même mieux, lorsque ε et $\eta \rightarrow 0$ on applique alors un résultat classique. Mais cette vérification est inutile : on va obtenir autrement l'infinie différentiabilité de $\chi_1 \perp \chi_2$, sachant qu'elle est limite uniforme : dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $\chi_1 \perp \chi_2$ est une fonction continue, donc

définit une distribution limite, toujours dans $R^n - \{0\}$, des $\chi_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta}$.
 On va montrer que $\chi_{1\varepsilon} * \chi_{2\eta}$ converge au sens des distributions vers $k_1 * k_2$ en dehors de l'origine ; donc, dans $R^n - \{0\}$, $k_1 * k_2$ et $\chi_1 \perp \chi_2$ sont égales comme distributions, donc comme fonctions puisque continues ; comme (voir corollaire précédent) $k_1 * k_2$ est une "v. p." en notre sens, avec peut-être en plus une masse à l'origine, dans $R^n - \{0\}$, $k_1 * k_2$ est homogène de degré $-n$, indéfiniment différentiable, de moyenne nulle sur Ω ; il en est de même de $\chi_1 \perp \chi_2$ qui définit une v. p. :

$$k_1 \perp k_2 = v. p. \chi_1 \perp \chi_2 = k_1 * k_2 + C \delta$$

car $k_1 \perp k_2$ et $k_1 * k_2$ sont toutes deux homogènes de degré $-n$ et égales en dehors de l'origine.

Or, $\mathcal{F} k_{1\varepsilon} \rightarrow \mathcal{F} k_1$ presque partout (pour ξ donné $|\int_{\varepsilon' < |x| < \varepsilon} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \chi_{1\varepsilon'} dx|$ est aussi petit qu'on veut) et les $\mathcal{F} k_{1\varepsilon}$ sont uniformément bornées (exposé précédent) donc

$$\mathcal{F} k_{1\varepsilon} \mathcal{F} k_{2\eta} \rightarrow \mathcal{F} k_1 \mathcal{F} k_2$$

presque partout et sont uniformément bornées dans $L^\infty_{\mathcal{S}}$; et, (LEBESGUE) la convergence se fait dans L^∞ faible, donc dans \mathcal{S}' faible.

2. Autre version du théorème de Calderón-Zygmund.

THÉORÈME 2 (CALDERÓN-ZYGMUND [1]). - Supposons que χ définisse une "distribution v. p." et de plus que $\chi(\omega) + \chi(-\omega) \in L^q$ pour un q vérifiant $1 < q < \infty$. Alors $k * = v. p. \chi \in \bar{\mathcal{F}}(M_p)$, (opère par convolution dans L^p) et

$$\|k\|_{\bar{\mathcal{F}}M_p} \leq C_{pq} [\|\chi\|_{L^1(\Omega)} + \|\chi(\omega) + \chi(-\omega)\|_{L^q(\Omega)}] .$$

DÉMONSTRATION.

1° Supposons d'abord χ impaire : $\chi(\omega) = -\chi(-\omega)$; $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$k_\varepsilon * \varphi = \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(x-y) \chi(y) dy .$$

On passe en coordonnées polaires (χ homogène) :

$$k_\varepsilon * \varphi = \int_{t > \varepsilon} t^{-1} dt \int_{\Omega} \chi(\omega) \varphi(x-t\omega) d\omega = \int_{t > \varepsilon} t^{-1} dt \int_{\Omega} \chi(-\omega) \varphi(x+t\omega) d\omega$$

donc

$$k_\varepsilon * \varphi = 1/2 \int_{\Omega} \chi(\omega) d\omega \int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)] dt \quad .$$

On a (MINKOWSKI) :

$$\|k_\varepsilon * \varphi\|_p \leq 1/2 \int_{\Omega} |\chi(\omega)| d\omega \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)] dt \right|^p \right)^{1/p}$$

pour calculer l'intégrale sur \mathbb{R}^n , on peut procéder d'après FUBINI par intégrations successives en choisissant par exemple l'axe de ω comme axe des x_1

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)] dt = \text{v. p. } (1/t)_\varepsilon * \varphi$$

$$\int dx_1 |\text{v. p. } (1/t)_\varepsilon * \varphi|^p \leq C_p^p \int dx_1 |\varphi(x_1, \dots, x_2, \dots, x_n)|^p$$

(exposés 2 et 3) C_p indépendant de ε . Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)] dt \right|^p \\ \leq C_p^p \int |\varphi(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1, \dots, dx_n \end{aligned}$$

et

$$\|k_\varepsilon * \varphi\|_p \leq 1/2 C_p \int |\chi(\omega)| d\omega \|\varphi\|_p$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}^1$, $k_\varepsilon * \varphi$ converge uniformément vers $k * \varphi$; car, φ étant à support compact, $\varphi(x - y) = \varphi(x) + \sum y^i g_i(y, x)$ avec $|g_i(y, x)| < M < \infty$ donc

$$|\text{v. p. } \int_{|y| < \varepsilon} \chi(y) \varphi(x - y) dy| \leq \sum M \int |\chi(y) y^i| dy \leq \mathbf{A} \mathbf{M} \varepsilon$$

donc

$$\|k * \varphi\|_p \leq 1/2 C_p \int |\chi(\omega)| d\omega \|\varphi\|_p \quad .$$

Il en résulte immédiatement que, pour $\varphi \in \mathcal{D}^1$, les $k_\varepsilon * \varphi$ convergent vers $k * \varphi$ dans L^p ; comme les k_ε forment un ensemble équicontinu dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$, k est limite des k_ε dans $\mathcal{L}_c(L^p, L^p)$ [1].

2° Cas général. - On sépare les parties paire et impaire, de $\chi(\omega)$. Il reste donc à démontrer le théorème pour $\chi(\omega) = \chi(-\omega)$, $\chi \in L^q(\Omega, d\omega)$ $q > 1$.

a. Supposons d'abord χ indéfiniment différentiable. On va se ramener au cas de χ impaire, en considérant $\chi * r_j$, où r_j est la distribution v. p. impaire :

$$r_j = v. p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad .$$

On a $\mathcal{F}(r_j) = \chi_j = C \frac{\xi_j}{|\xi|}$, impaire, donc (théorème 1), $k * r_j = v. p. [r_j \perp \chi]$.

(Les $r_j * \chi$ sont les noyaux de Riesz, ce sont des opérateurs dans L^p (théorème de l'exposé 2) ;

$$\sum_j \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} = 1 \quad .$$

Par Fourier, on a : $\sum r_j * r_j = C \delta$.

On va montrer :

$$(1) \quad \|r_j \perp \chi\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|\chi\|_{L^q(\Omega)} \quad .$$

D'après les résultats obtenus pour χ impaire :

$$\|r_j * k\|_{\overline{\mathcal{F}}_{M_p}} \leq C_p \|r_j * k\|_{L^1(\Omega)} \leq C_{pq} \|r_j * k\|_{L^q(\Omega)} = C_{pq} \|r_j \perp k\|_{L^q(\Omega)}$$

et d'après (1)

$$\|r_j * k\|_{\overline{\mathcal{F}}_{M_p}} \leq C'_{pq} \|\chi\|_{L^q(\Omega)} \quad .$$

Démontrons donc (1) ; soit Γ la couronne : $1 \leq |x| \leq 2$; $r_j * k$ est homogène, il suffit donc de démontrer que $\|r_j \perp k\|_{L^q(\Gamma)} \leq C \|\chi\|_{L^q(\Omega)}$. Soit :

$$k = k_{1/2} + k' \quad ; \quad k_\varepsilon = k_{1/2} + k'_\varepsilon$$

$$r_j * k_\varepsilon = r_j * k_{1/2} + r_j * k'_\varepsilon$$

$k_{1/2}$ est dans L^q (homogénéité) donc, $r_j * k_{1/2}$ est dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|r_j * k_{1/2}\|_{L^q(\Gamma)} < C \|k_{1/2}\|_{L^2(\Omega)}$$

Étudions $r_j * k'_\varepsilon$ dans Γ :

$$r_j * k'_\varepsilon = \int_{\varepsilon < |y| < 1/2} r_j(x-y) \chi(y) dy = \int_{\varepsilon < |y| < 1/2} [r_j(x-y) - r_j(x)] \chi(y) dy .$$

Or, si x et y sont dans les régions considérées, $|r_j(x-y) - r_j(x)| \leq C|y|$ (C indépendant de ε) en passant en polaires, on a donc, dans Γ ,

$$|r_j * \chi'_\varepsilon| < C \int |\chi(\omega)| d\omega < C \left(\int |\chi(\omega)|^q d\omega \right)^{1/q} .$$

Le résultat s'ensuit.

b. Cas général : on régularise k par des éléments de Σ qui approchent k dans $L^q(\Omega)$.

REMARQUE. - Le théorème 2 est encore vrai si l'on suppose

$$\lambda(\omega) = \chi(\omega) + \chi(-\omega) \in L^1 \text{ Log } L^1$$

i. e.

$$\int |\lambda(\omega)| (1 + \text{Log}^+ |\lambda(\omega)|) d\omega < +\infty .$$

Voir d'autres résultats dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale (fascicule de résultats). - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1196 ; Eléments de Mathématique, 16).
- [2] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - On singular integrals, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 289-309.
- [3] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Algebras of certain singular operators, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 310-320.
- [4] MIKHLIN (S. G.). - O mud'tiplikatorakh integralov fur'e, Doklady Nauk SSSR, t. 109, p. 701-703.