

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE
Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ (suite)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 3, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A3_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

18 novembre 1959

MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}L^p$ (suite)

par Bernard MALGRANGE

1. Le théorème de Sobolev.

Considérons l'espace \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et un nombre réel γ tel que $0 < \gamma < 1$. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{|x|^{2n} (1-\gamma)^n}$ est localement intégrable, définit donc une distribution tempérée et on sait que $\mathcal{F} \frac{1}{|x|^{2n} (1-\gamma)^n} = \frac{K}{|\xi|^\gamma}$ (K , une constante).

THÉORÈME (SOBOLEV, [2]). - L'opérateur de convolution $\frac{1}{|x|^{2n} (1-\gamma)^n} *$ est de type (p, q) dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \gamma$ et $1 < p < q < +\infty$ (i. e. lorsque $1 < p < \frac{1}{\gamma}$.)

Deux lemmes seront utiles pour la démonstration :

LEMME 1. - Si $f \in L^p$, on a l'inégalité

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} [|\xi|^\gamma \mathcal{F}f(\xi)]^p \frac{d\xi}{|\xi|^{2n}} \right]^{1/p} \leq C \|f\|_{L^p} \quad \text{pour } 1 < p \leq 2.$$

(inégalité démontrée dans l'exposé numéro 1).

LEMME 2 (Marcel RIESZ). - Soient p et p' tels que $1 \leq p \leq 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; l'application $\varphi \rightarrow \mathcal{F}\varphi$ est alors de type (p, p') .

En effet, pour $p = 1$ et $p = 2$, le résultat est immédiat ; le cas général résulte ensuite du théorème d'interpolation de Marcel RIESZ.

Donnons le principe de la démonstration du théorème :

a. En raisonnant comme à l'exposé numéro 2, on montre que $\frac{1}{|x|^{2n} (1-\gamma)^n} *$ est de type $(1, \frac{1}{1-\gamma})$ faible.

b. Supposons le théorème acquis pour un couple (p, q) tel que $1 < p < \frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \gamma$. Par dualité, le théorème sera vrai pour le couple (q', p') où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (en effet, cette fois, $\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} = \gamma$ et $1 < q' < \frac{1}{\gamma}$). On a $(p, q) = (q', p')$ si et seulement si $p = \frac{2}{1+\gamma}$, et lorsque p croît de 1 à $\frac{2}{1+\gamma}$, q' décroît de $\frac{1}{\gamma}$ à $\frac{2}{1+\gamma}$; il suffit donc de démontrer le théorème

pour $1 < p \leq \frac{2}{1+\gamma}$.

c. Démonstration du théorème dans le cas $p = \frac{2}{1+\gamma}$, et donc $q = \frac{2}{1-\gamma}$: il faut montrer que $\left\| \frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * \varphi \right\|_q \leq C \|\varphi\|_p$.

Puisqu'on a $1 < q' < 2$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, il suffit donc (lemme 2) de démontrer que

$$\left\| \mathcal{F} \left[\frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * \varphi \right] \right\|_{q'} \leq C_1 \|\varphi\|_p ;$$

ou encore, q' étant égal à p , que $\left\| \frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} \mathcal{F} \varphi \right\|_{\frac{2}{1+\gamma}} \leq C_2 \|\varphi\|_{\frac{2}{1+\gamma}}$,

inégalité qui est conséquence immédiate du lemme 1, puisque $1 < p = \frac{2}{1+\gamma} \leq 2$.

d. Résumons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * & \text{ est de type } \left(1, \frac{1}{1-\gamma}\right) \text{ faible} \\ & \text{ est de type } \left(\frac{2}{1+\gamma}, \frac{2}{1-\gamma}\right) . \end{aligned}$$

Par le théorème de Marcinkiewicz, cet opérateur est donc de type (p, q) pour $1 < p < \frac{2}{1+\gamma}$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. - La démonstration qui précède est due à ZYGMUND [3].

2. Opérateurs intégraux singuliers.

Dans tout ce paragraphe, on désignera par Ω la sphère unité de \mathbb{R}^n , et par \varkappa une fonction définie dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, à valeurs complexes, satisfaisant aux conditions suivantes :

1. \varkappa est positivement homogène de degré $-n$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
2. $\varkappa(\omega)$ est intégrable sur la sphère Ω .
3. $\int_{\Omega} \varkappa(\omega) d\omega = 0$.

1° On se propose de définir la distribution "valeur principale de \varkappa " (v. p. de \varkappa). Donnons-nous d'abord $\varepsilon > 0$, la boule fermée B_ε de centre 0 et de rayon ε et choisissons $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = 1$ dans B_ε .

a. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ quelconque : $\varphi - \varphi(0)\alpha \in \mathcal{D}$ et, de plus, $\varphi - \varphi(0)\alpha = o(|x|)$ lorsque $x \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varkappa(x) [\varphi(x) - \varphi(0)\alpha(x)] dx$$

a un sens.

b. L'intégrale $\int_{|x| > \varepsilon'} \kappa(x) \alpha(x) dx$ ne dépend pas de ε' , lorsque $\varepsilon' \ll \varepsilon$: cela résulte de l'hypothèse $\int_{\Omega} \kappa(\omega) d\omega = 0$, et de l'homogénéité de κ .
On posera :

$$\text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(x) \alpha(x) dx = \int_{|x| > \varepsilon} \kappa(x) \alpha(x) dx .$$

c. Considérons enfin l'application

$$\psi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(x) [\psi(x) - \psi(0) \alpha(x)] dx + \psi(0) \text{ v. p.} \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(x) \alpha(x) dx$$

on démontre alors immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION.

1. α étant fixée, on définit ainsi une distribution k ;
2. Considérons, pour $\varepsilon > 0$, la distribution k_ε définie par

$$\langle k_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{|x| > \varepsilon} \kappa(x) \psi(x) dx$$

on a $k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon$ dans \mathcal{D}' .

3. k ne dépend donc pas du choix de α .

DÉFINITION. - k s'appelle la distribution valeur principale associée à κ ;
l'opérateur de convolution $\psi \rightarrow k * \psi$ s'appelle opérateur intégral singulier associé à κ .

Dans la suite, pour $\varepsilon = 0$, on posera $k_0 = k$.

2° Le premier résultat concernant le type des opérateurs intégraux singuliers est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. (cf. [1]). - Soit p tel que $1 < p < +\infty$, et supposons κ une fois continuellement différentiable.

1. L'opérateur intégral singulier associé est de type (p, p) .
2. Les opérateurs $k_\varepsilon *$ sont de type (p, p) .
3. Les opérateurs $k_\varepsilon *$ forment, pour $\varepsilon > 0$ variable, un ensemble borné dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ (muni de sa norme) ; ils convergent, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers $k *$ dans l'espace $\mathcal{L}_c(L^p, L^p)$. (Les applications linéaires continues de L^p dans L^p , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts).

Grâce aux résultats de l'exposé numéro 2, il suffit de vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour $\varepsilon > 0$, k_ε est une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
2. Les distributions $K_\varepsilon = \mathcal{F} k_\varepsilon$ forment, pour $\varepsilon > 0$, une partie bornée de L_ξ^∞ .
3. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $t > 0$, la relation $|y| \leq \frac{t}{2}$ entraîne

$$\int_{|x| \geq t} |k_\varepsilon(x-y) - k_\varepsilon(x)| dx \leq C$$

la condition 1 est trivialement vérifiée.

Vérification de la condition 2. - Choisissons $\beta \in \mathcal{D}$, $\beta = 1$ pour $|x| \leq 2$, $\beta = 0$ pour $|x| \geq 3$.

a. Cas où $\varepsilon = 0$. - k est un courant de degré 0, homogène de degré $-n$; donc $\mathcal{F} k = K$ est homogène de degré 0. Pour montrer que $K \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$, il suffit donc de prouver que la restriction K' de K à $1 < |\xi| < 2$ est dans $L^\infty(1 < |\xi| < 2)$. Pour ce faire, écrivons $k = \beta k + (1 - \beta) k$.

1. βk est à support compact, donc $\mathcal{F}(\beta k)$ est analytique entière : sa restriction à $1 < |\xi| < 2$ est bien dans $L^\infty(1 < |\xi| < 2)$.

2. $(1 - \beta) k$ est une fois continuellement différentiable dans \mathbb{R}^n ; $\frac{\partial}{\partial x_i} [(1 - \beta) k]$ est continue, égale à $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ si $|x| > 3$, donc est $O\left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right)$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$: on en déduit $\frac{\partial}{\partial x_i} [(1 - \beta) k] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et finalement

$$\int_1^\infty \mathcal{F} [(1 - \beta) k] \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \text{ d'où le résultat.}$$

b. Cas où $\varepsilon > 0$. - Les divers $\mathcal{F} k_\varepsilon$ étant déduits les uns des autres par homothétie, on peut supposer $\varepsilon = 1$. Soit donc k_1 , une fois continuellement différentiable pour $|x| > 1$. Pour prouver que $\mathcal{F} k_1 \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$, on écrit encore $k_1 = \beta k_1 + (1 - \beta) k_1$.

1. βk_1 est à support compact et bornée, donc $\beta k_1 \in L_x^1(\mathbb{R}^n)$ et par suite $\mathcal{F} \beta k_1 \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. $(1 - \beta) k_1 = (1 - \beta) k$ car $1 - \beta = 0$ si $|x| < 2$, donc $(1 - \beta) k_1 = k - \beta k$.

On sait que $\mathcal{F} k \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$ donc $\mathcal{F}(\beta k) = \mathcal{F} \beta * \mathcal{F} k \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Finalement $\mathcal{F} [(1 - \beta) k_1] = \mathcal{F} k - \mathcal{F}(\beta k) \in L_\xi^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Vérification de la condition 3. -

a. Cas où $\varepsilon = 0$. - Par raison d'homogénéité de k on peut supposer $t = 1$. Soit donc $|x| \gg 1$ et $|y| \leq \frac{1}{2}$, et I le segment $[x, x - y]$. K est une fois continuellement différentiable sur I , et donc

$$|\kappa(x - y) - \kappa(x)| \leq |y| \sup_{z \in I} \left| \frac{\partial \kappa}{\partial x_i}(z) \right| \leq \frac{C_2}{|x|^{n+1}}$$

puisque K est homogène de degré $-n$. (C_2 indépendant de x et y) D'où

$$\int_{|x| \gg 1} |\kappa(x - y) - \kappa(x)| dx \leq C_2 \int_{|x| \gg 1} \frac{dx}{|x|^{n+1}} < C.$$

b. Cas où $\varepsilon > 0$. - On peut, par homothétie, supposer $\varepsilon = 1$ (mais t quelconque !) Fixons t et y et faisons une partition de l'ensemble des x tels que $|x| \geq t$:

Soit

$$\begin{aligned} O_1 &= \{x ; |x| \geq t, |x| > 1, |x - y| > 1\} \\ O_2 &= \{x ; |x| \geq t, |x| > 1, |x - y| \leq 1\} \\ O_3 &= \{x ; |x| \geq t, |x| \leq 1, |x - y| > 1\} \\ O_4 &= \{x ; |x| \geq t, |x| \leq 1, |x - y| \leq 1\} \end{aligned}$$

- Sur O_1 : $k_1 = \kappa$ donc (cf. le cas $\varepsilon = 0$) $\int_{O_1} |k_1(x - y) - k_1(x)| dx \leq C_1$

- Sur O_2 : on a $|x| > 1$, $|x - y| \leq 1$, $|y| \leq \frac{t}{2}$ donc $1 < |x| \leq 1 + \frac{t}{2}$; et $|x| \geq t$; donc O_2 est vide si $t > 2$. Si $t \leq 2$, O_2 est contenu dans $1 \leq |x| \leq 2$; dans tous les cas

$$\int_{O_2} |k_1(x - y) - k_1(x)| dx \leq \int_{1 \leq |x| \leq 2} |\kappa(x)| dx \leq C_2.$$

- Sur O_3 : par un calcul analogue à celui fait pour O_2 , on trouve :

$$\int_{O_3} |k_1(x - y) - k_1(x)| dx \leq \int_{1/2 \leq |x| \leq 1} |\kappa(x)| dx \leq C_3$$

- Sur O_4 : $k_1(x) = 0$ et $k_1(x - y)$ aussi.

Donc

$$\int_{O_4} |k_1(x - y) - k_1(x)| dx = 0$$

on a donc

$$\int_{|x| > t} |k_1(x-y) - k_1(x)| dx \leq C = C_1 + C_2 + C_3 \quad \text{dès que } |y| \leq \frac{t}{2} :$$

la condition 3 est satisfaite.

REMARQUE. - Les raisonnements précédents pourraient s'appliquer (avec des modifications de détail) si l'on supposait seulement que $\kappa(\omega)$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 0$. Nous ne nous y attarderons pas, car nous obtiendrons ultérieurement (cf. exposé numéro 4) des résultats plus précis par une autre méthode.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (Antoni). - On the existence of certain singular integrals, Acta Math., t. 88, 1952, p. 85-139.
 - [2] SOBOLEV (S.). - Ob odnog teoreme funkcionad'nogo anadiza, Mat. Sbornik (Recueil mathématique), N. S., t. 4 (46), 1938, p. 471-497.
 - [3] ZYGMUND (Antoni). - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 35, 1956, p. 223-248.
-