Bernard Malgrange

Première partie : opérateurs intégraux singuliers, théorèmes d'interpolation dans les espaces L^p

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 1, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A1_0>

3 novembre 1959

Première partie : OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS

THÉORÈMES D'INTERPOLATION DANS LES ESPACES L^p

par Bernard MALGRANGE

Les résultats d'unicité du problème de Cauchy que nous allons exposer reposent sur des propriétés d'opérateurs intégraux singuliers à noyaux de la forme valeur principale (v. p.) en y de $A(x, x-y)$ où A est homogène par rapport à la deuxième variable. A strictement parler, nous n'aurons besoin de ces opérateurs que dans L^2, mais, pour être complet, nous donnerons leurs propriétés dans les L^p. Ce premier exposé sera consacré aux théorèmes qui permettent cette généralisation.

1. Le théorème de Marcel Riesz et Thorin.

E et F seront des espaces localement compacts sur lesquels seront données des mesures positives μ et ν respectivement. Nous montrerons que si T est une application linéaire de $L^p(\mu)$ dans $L^{p_1}(\nu)$ et de $L^q(\mu)$ dans $L^{q_1}(\nu)$, elle applique aussi $L^r(\mu)$ dans un $L^{r_1}(\nu)$ approprié pourvu que $p \leq r \leq q$ (il s'agit des L^p à valeurs complexes).

$\|f\|_p$ désignera la norme de f dans L^p, le contexte montrera toujours clairement s'il s'agit de $L^p(\mu)$ ou de $L^p(\nu)$.

DÉFINITION 1. - Une application linéaire de $\mathcal{D}^0(E)$ dans $L^1_{loc}(\nu)$ sera dite de type (p, q) s'il existe une constante $C_{p,q}$ telle que :

$$\|Tf\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p .$$

On prendra toujours $C_{p,q} = \sup(\|Tf\|_q / \|f\|_p)$. Si $p < \infty$, T se prolonge (d'une seule manière) en une application linéaire continue de L^p dans L^q.

THÉORÈME 1. (théorème de Marcel Riesz et Thorin). - La fonction

$$(\alpha , \beta) \longrightarrow \log C_{1/\alpha , 1/\beta}$$

est convexe dans le carré $[0 , 1] \times [0 , 1]$.

DÉMONSTRATION. (THORIN [4]). - Nous allons traiter le cas où les α_i et β_i ne sont pas nuls, les autres s'obtiennent par passage à la limite. f et g étant des fonctions continues et à support compact dans E et F respectivement, nous poserons :

$$\langle Tf \ , \ g \rangle = \int Tf.g \, d\nu$$

$$f = F^{\alpha}\varphi \quad \text{avec} \quad F \geqslant 0 \ , \quad \int F \, d\mu = 1 \ , \quad |\varphi| = 1$$

et φ est continue partout où $F \neq 0$.

$$g = G^{\beta'}\psi \quad \text{avec} \quad G \geqslant 0 \ , \quad \int G \, d\nu = 1 \ , \quad |\psi| = 1 \quad \text{et} \quad \beta' = (1 - \beta) \ .$$

Nous allons étudier la fonction de la variable complexe z :

$$u(z) = \langle T(F^{z\alpha_1 + (1-z)\alpha_2}\varphi), \ G^{z\beta'_1 + (1-z)\beta'_2}\psi \rangle$$

(ici encore $\beta'_i = 1 - \beta_i$). Remarquons que les parties imaginaires des exposants peuvent être considérées comme modifiant φ et ψ mais non pas F et G .

Si alors T est de type $(1/\alpha_1 \ , 1/\beta_1)$ et $(1/\alpha_2 \ , 1/\beta_2)$, $u(z)$ vérifie les conditions suivantes :

a. Elle est continue pour $0 \leqslant \Re z \leqslant 1$.

b. Elle est bornée pour $\Re z = 0$ et $\Re z = 1$, respectivement par $C_{1/\alpha_1, 1/\beta_1}$ et $C_{1/\alpha_2, 1/\beta_2}$ (d'après l'inégalité de Hölder).

c. Elle est holomorphe et bornée pour $0 < \Re z < 1$ (vérification facile).

Le "theorème des trois droites" affirme précisément que, sous ces conditions, la fonction :

$$M(x) = \sup_{\Re z = x} |u(z)|$$

est convexe dans l'intervalle $[0 \ , 1]$.

Enfin la fonction $C_{1/\alpha, 1/\beta}$ est convexe à son tour comme borne supérieure d'une famille de fonctions convexes (sur chaque segment $[(\alpha_1 \ , \beta_1) \ , (\alpha_2 \ , \beta_2)]$ donc aussi dans le carré).

COROLLAIRE. - Si T est de type $(p_1 \ , q_1)$ et $(p_2 \ , q_2)$, alors, pour tout t compris entre 0 et 1 , T est de type $(p \ , q)$ avec :

$$1/p = t/p_1 + (1 - t)/p_2 \ , \qquad 1/q = t/q_1 + (1 - t)/q_2$$

REMARQUE 1. - La démonstration du théorème de Marcel Riesz et Thorin suppose les espaces L^p complexes. Dans le cas réel, il faut ajouter $\beta_i \leqslant \alpha_i$ aux hypothèses. Mais le corollaire subsiste comme conséquence du cas complexe.

REMARQUE 2. - On trouvera une extension du résultat (et de la méthode) précédents, pour certaines applications non linéaires, dans [1].

2. Le théorème de Marcinkiewicz.

Le théorème de Marcel Riesz et Thorin ne suffit pas à toutes les applications. Par exemple, il est connu que l'application : $\varphi \to (\text{v. p. } 1/x) * \varphi$ est de type $(2, 2)$ et n'est pas de type $(1, 1)$; mais nous montrerons dans un exposé ultérieur qu'elle est "de type faible $(1, 1)$" au sens de la définition suivante :

DÉFINITION 2. - Une application linéaire T de $L_c^\infty(\mu)$ (espace des fonctions bornées en dehors d'un ensemble de mesure nulle et équivalentes à zéro en dehors d'un compact) dans $L_{loc}^1(\nu)$ est dite de type faible (p, q) .

a. si $q = \infty$ et elle est de type (ordinaire) (p, q) ,

b. si $q \neq \infty$ et il existe une constante C telle que :

$$\text{mes}\left\{y \,;\, |Tf(y)| > z\right\} \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{z}\right)^q \quad . \tag{1}$$

On vérifie immédiatement que toute application de type (p, q) ordinaire est aussi de type faible (p, q) . La réciproque est fausse puisque $(\text{v. p. } 1/x) *$ n'est pas de type $(1, 1)$.

Le théorème de Marcinkiewicz, que nous allons maintenant énoncer, nous assurera que $(\text{v. p. } 1/x) *$ est de type (p, p) pour $1 < p < 2$ et, par transposition, pour $2 < p < \infty$.

THÉORÈME 2 (MARCINKIEWICZ [2]). - Soient (α_1, β_1) , (α_2, β_2) deux points différents de R^2 vérifiant chacun $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \leq 1$. Posons :

$$\begin{cases} \alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 \\ \beta = t\beta_1 + (1-t)\beta_2 \end{cases} \quad \text{où } 0 < t < 1 \quad .$$

Alors toute application linéaire T de types faibles $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ et $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ est de type (ordinaire) $(1/\alpha, 1/\beta)$.

EXEMPLE d'application. - Quel que soit p , si $1 < p < \infty$ il existe une constante C_p telle que pour toute fonction $f \in L^p(R^n)$ de transformée de Fourier $\hat{f}$:

$$\int |\hat{f}(\xi)\, \xi^n|^p \frac{d\xi}{\xi^{2n}} \leq C_p \int |f(x)|^p \, dx$$

(HARDY, LITTLEWOOD, PALEY). Pour $p = 2$, c'est le théorème de Plancherel et pour

$p = 1$ on vérifie (1), dx jouant le rôle de $d\mu$, $R^n - \{0\}$ celui de F, $\frac{d\xi}{\xi^{2n}}$ celui de $d\nu$, et enfin $f \to \hat{f}\xi^n$ celui de T.

DÉMONSTRATION dans le cas diagonal. - $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, 2)$. C'est d'ailleurs le seul que nous aurons à utiliser. L'idée qui guide le raisonnement est la suivante : soit $f \in L^p$ avec $p_1 < p < p_2$, alors on peut écrire $f = g + h$, où $g \in L^{p_1}$ et $h \in L^{p_2}$, en posant par exemple : $g(x) = f(x)$ si $|f(x)| > 1$ et $g(x) = 0$ si $|f(x)| \leq 1$.

On suppose $p_1 < p < p_2 < \infty$ où $p_1 = 1/\alpha_1$, $p_2 = 1/\alpha_2$, $p = 1/\alpha$ ainsi que dans toute la suite. Soit $f \in L_c^\infty(\mu)$, nous définissons g_z et h_z $(z > 0)$ par :

$$f = g_z + h_z \begin{cases} g_z(x) = f(x) & \text{quand } |f(x)| > z \\ g_z(x) = 0 & \text{quand } |f(x)| \leq z \end{cases} .$$

Remarquons que $|Tf| > z$ entraîne $|Tg_z| > z/2$ ou $|Th_z| > z/2$ d'après la linéarité de T (qui n'interviendra plus, cf. la remarque 2). Il s'ensuit de là que, si on pose :

$$A(z) = \text{mes}\{y \; ; \; Tf(y) > z\} ,$$

$$A(z) \leq \text{mes}\{y \; ; \; Tg_z(y) > z/2\} + \text{mes}\{y \; ; \; Th_z(y) > z/2\}$$

et en portant (1) dans cette inégalité :

$$A(z) \leq C_1\left(\frac{2\,\|g_z\|_{p_1}}{z}\right)^{p_1} + C_2\left(\frac{2\,\|h_z\|_{p_2}}{z}\right)^{p_2} . \tag{2}$$

Maintenant $\|Tf\|_p^p$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale de Stieltjes (éventuellement infinie) :

$$\|Tf\|_p^p = -\int_0^\infty u \, dA(u^{1/p}) = -\int_0^\infty z^p \, dA(z) .$$

On peut intégrer par parties ; le terme tout intégré $z^p A(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0 (appliquer (1) avec p_1 en tenant compte de $p_1 < p$) et vers ∞ (appliquer (1) avec p_2 en tenant compte de $p < p_2$).

$$\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty z^{p-1} A(z) \, dz .$$

En y portant (2) :

$$\|Tf\|_p^p \leq pC_1\, 2^{p_1} \int_0^{\infty} z^{p-p_1-1}\, dz \int_{|f|>z} |f(x)|^{p_1}\, d\mu$$

$$+ pC_2\, 2^{p_2} \int_0^{\infty} z^{p-p_2-1}\, dz \int_{|f|\leq z} |f(x)|^{p_2}\, d\mu \quad .$$

Calculons par exemple la première intégrale double. Elle est finie puisque $p > p_1$ et que f est bornée. Si on intègre par parties, le terme tout intégré $\dfrac{z^{p-p_1} \int_{|f|>z}}{p-p_1}$ s'annule quand $z = 0$ et ∞ , et il reste :

$$-\frac{1}{p-p_1} \int_0^{\infty} z^{p-p_1}\, d \int_{|f|>z} |f(x)|^{p_1}\, d\mu = \frac{1}{p-p_1} \int |f|^p\, d\mu$$

(La dernière égalité s'obtient en écrivant $\int_{|f|>z} |f|^{p_1}\, d\mu$ comme on a écrit $\|Tf\|_p^p$ plus haut).

Des transformations analogues montrent que la deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{p_2 - p} \int |f|^p\, d\mu$$

de sorte qu'au total :

$$\|Tf\|_p^p \leq p\left(\frac{C_1\, 2^{p_1}}{p-p_1} + \frac{C_2\, 2^{p_2}}{p_2-p}\right) \|f\|_p^p$$

inégalité qui équivaut précisément à la conclusion à démontrer.

Le cas $p_2 = +\infty$ se traite de manière analogue.

REMARQUE 1. - Si $\alpha_i \neq \beta_i$ le principe de la démonstration est le même, mais il survient des complications d'ordre technique. $A(z)$ est défini par une relation de la forme :

$$A(z) = \text{mes} \left\{ y \; ; |Tf(y)| > az^{\xi} \right\} \quad .$$

(voir ZYGMUND [5]).

REMARQUE 2. - La linéarité de T n'intervient que par la relation :

$$|T(g+h)| \leq k(|Tg| + |Th|)$$

laquelle caractérise (par définition) les applications quasi-linéaires. Le théorème est donc encore vrai pour ces dernières.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - A note on the interpolation of sublinear operations, Amer. J. Math., t. 78, 1956, p. 282-288.

[2] MARCINKIEWICZ (Joseph). - Sur l'interpolation d'opérations, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 208, 1939, p. 1272-1273.

[3] RIESZ (Marcel). - Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math., t. 49, 1926, p. 465-497.

[4] THORIN (G. O.). - Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., t. 9, 1948, 57 p.

[5] ZYGMUND (A.). - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 35, 1956, p. 223-248.